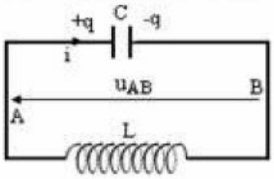
Dipôle LC : association série d'un condensateur chargé de capacité C et de charge initiale q_0 et d'une bobine d'inductance L et de résistance interne r négligeable.

I.Etude du circuit LC

1. Montage : Décharge d'un condensateur dans une bobine



2. Equation différentielle :

En appliquant la loi d'additivité des tensions $Uc + U_L=0$ et les transitions :

$$q=C.Uc \quad \text{et} \quad i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{dU_C}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = C.\frac{d^2U_C}{dt^2} \quad U_L = r.i + L.\frac{di}{dt} = L.\frac{di}{dt} \quad ; \quad r=0$$

On aboutit à l'équation différentielle vérifié par une variable donnée :

$$Uc + U_L = Uc + r.i + L.\frac{di}{dt} = Uc + L.\frac{di}{dt} = 0$$

Variable Uc:

$$Uc + L.\frac{di}{dt} = U_C + L.C.\frac{d^2U_C}{dt^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}.U_C = 0$$

Variable q:

$$Uc + L.\frac{di}{dt} = U_C + L.\frac{d^2q}{dt^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{q}{C} + L.\frac{d^2q}{dt^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{L.C}.q = 0 \quad \text{Avec } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

ω_0 : Pulsation propre (en rad/s)

3. Equation horaire ou la solution :

Soit Uc(t) comme variable, la solution est :

$$Uc(t) = Um.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$$

avec

- Um : L'amplitude (la valeur maximale de la tension Uc(t)
- $\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi$:La phase à l'instant t
- φ: la phase à l'origine des temps t=0
- T_0 : la période propre (s)
- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$: Pulsation propre (en rad/s)

3.1.Déterminer T_0 la période propre :

Remplacer la solution et sa dérivée seconde dans l'équation différentielle :

$$Uc(t) = Um.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right) \qquad \frac{dUc(t)}{dt} = -Um.\frac{2\pi}{T_0}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right) \qquad \frac{d^2Uc}{dt^2} = -Um.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$$

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}.U_C = 0$$

$$-Um.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right) + \frac{1}{LC}.Um.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right) = 0 \quad \text{donc} \quad Um.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right).\left(-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + \frac{1}{LC}\right) = 0$$

L'équation est juste si $-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + \frac{1}{LC} = 0$ et $\frac{1}{LC} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2$, on en déduit alors $T_0 = 2.\pi.\sqrt{L.C}$

Remarque :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2.\pi.\sqrt{L.C_0}} = \frac{1}{\sqrt{L.C}} \quad \text{d'où} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

3.2.Déterminer Um et φ par les conditions initiales :

A t=0 :
- Le condensateur est chargé et $Uc(0) = U_0 = E$
- i(0)=0 : le circuit est ouvert

On remplace les conditions initiales dans les expressions de Uc(t) et i(t) à l'instant t=0 .

$$Uc(t) = Um.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right) \quad \text{et} \quad i(t) = C.\frac{dUc(t)}{dt} = -C.Um.\frac{2\pi}{T_0}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$$

A l'instant t=0

$$Uc(0) = Um.\cos(\varphi) \quad \text{et} \quad i(0) = -C.\,Um.\frac{2\pi}{T_0}.\sin(\varphi)$$

(1)	(2)	(3)
$Uc(0) = Um.\cos(\varphi) = E$ $\cos(\varphi) = \frac{E}{U_m}$	et $i(0) = -C.\,Um.\frac{2\pi}{T_0}.\sin(\varphi) = 0$ alors $\sin(\varphi) = 0$ d'où $\varphi=0$ ou $\varphi=\pi$	Or $E > 0$ et $Um > 0$ alors $\cos(\varphi) = \frac{E}{U_m} > 0$ d'où $\varphi=0$

De la relation **(1)** on en déduit : $U_m = \frac{E}{\cos(\varphi)} = \frac{E}{\cos(0)} = E$

Conclusion : Um=E , $\varphi=0$, et $T_0 = 2.\pi.\sqrt{L.C}$ alors : $Uc(t) = E.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$

3.3.Expression de l'intensité de courant :

$i = C.\frac{dU_c}{dt} = -C.\,Um.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right).\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = Im.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$: Expression de l'intensité de courant

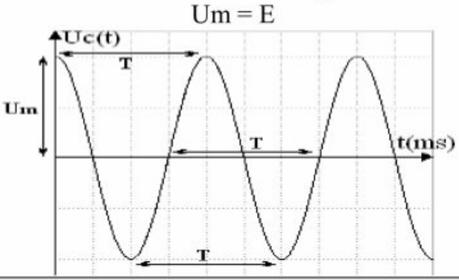
$$\text{Avec} \quad Im = C.\,Um.\left(\frac{2.\pi}{T_0}\right) = C.\,Um.\left(\frac{2.\pi}{2.\pi.\sqrt{L.C}}\right) = Um.\sqrt{\frac{C}{L}}$$

3.4.Quelques courbes :

❖ **Tension Uc(t):**

$$Uc(t) = Um.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$$

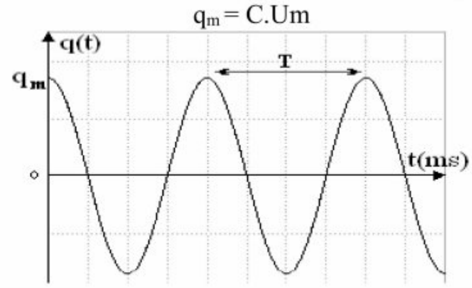
Um = E



❖ **Charge q(t):**

On a **q = C.Uc d'où** $q(t) = C.\,Um.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$

$q_m = C.Um$



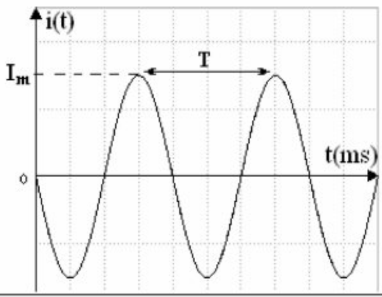
❖ **Intensité de courant i(t):**

$$i(t) = C.\frac{dUc(t)}{dt} = -C.\,Um.\frac{2\pi}{T_0}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$$

$$Im = C.\,Um.\frac{2\pi}{T_0}$$

Or $T_0 = 2.\pi.\sqrt{L.C}$ alors

$$Im = C.\,Um.\left(\frac{2.\pi}{2.\pi.\sqrt{L.C}}\right) = Um.\sqrt{\frac{C}{L}}$$



4. Energie totale E_T :

L'énergie totale E_T emmagasinée dans un circuit LC est à tout instant la somme de l'énergie électrique Ee dans le condensateur et de Em l'énergie magnétique dans la bobine

$\mathbf{E_T = Ee + Em}$ avec $Ee = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}C.U_C^2$ donc $Em = \frac{1}{2}L\,i^2 = \frac{1}{2}.L.(\frac{U_R}{R})^2 = \frac{1}{2}.\frac{L}{R^2}.U_R^2$

5. Conservation de l'énergie totale E_T :

on sait que : $E_T = Ee + Em = \frac{1}{2}C.U_C^2 + \frac{1}{2}L.i^2$ et on dérive $\frac{dE_T}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}C.U_C^2 + \frac{1}{2}L.i^2)$; $(f^n)' = n.f^{n-1}.f'$ et $f^2 = 2.f.f'$

$$\frac{dE_T}{dt} = \frac{1}{2}C.\frac{d}{dt}U_C^2 + \frac{1}{2}L.\frac{d}{dt}i^2$$

; $\frac{dUc^2}{dt} = 2.Uc.\frac{dUc}{dt}$ et $\frac{di^2}{dt} = 2.i.\frac{di}{dt}$

$$= \frac{1}{2}C.(2.Uc.\frac{dUc}{dt}) + \frac{1}{2}L.(2.i.\frac{di}{dt})$$

; $i = C.\frac{dUc}{dt}$ et $\frac{di}{dt} = C.\frac{d^2Uc}{dt^2}$

$$= C.Uc.\frac{dUc}{dt} + L.i.\frac{di}{dt}$$

$$= C.Uc.\frac{dUc}{dt} + L.i.\frac{di}{dt}$$

$$= C.Uc.\frac{dUc}{dt} + L.(C.\frac{dUc}{dt}).(C.\frac{d^2Uc}{dt^2})$$
$$= C.\frac{dUc}{dt}\left(Uc + L.C.\frac{d^2Uc}{dt^2}\right) \qquad ; Uc + L.C.\frac{d^2Uc}{dt^2} = 0 \text{ : Equation différentielle}$$
$$= 0$$

Conclusion :

$E_T = C^{te}$ est une constante au cours du temps donc l'énergie totale se conserve.

Les oscillations correspondent à un échange énergétique entre le condensateur et la bobine : Il y a conversion d'énergie électrique en énergie magnétique et réciproquement.

⁂ Exploiter les courbes :

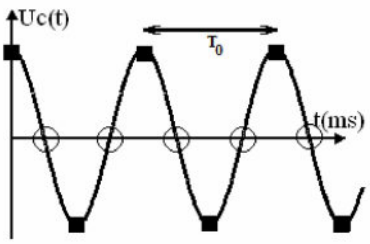
$$i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{dUc}{dt}$$

i(t) est la dérivée première de Uc(t) représentant une fonction sinusoïdale ($Uc(t) = Um.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$) donc i(t) est nulle si Uc(t) (ou bien q(t)) est extrémum (soit maximum ou minimum) et inversement.

Points spécifiques sur la figure	Uc(t)	q(t)	i(t)	Ee	Em	E_T= Ee+Em
○	0	0	I_m	0	$Em = \frac{1}{2} L I_m^2$	$E_T = \frac{1}{2} L I_m^2 = \frac{1}{2} L \frac{U_{Rm}^2}{R^2} = \frac{1}{2}.\frac{L}{R^2}.U_{Rm}^2$
■	U_m	q_m	0	$Ee = \frac{1}{2}\frac{q_m^2}{C}$	0	$E_T = \frac{1}{2}\frac{q_m^2}{C} = \frac{1}{2}C.U_{Cm}^2$

NB :

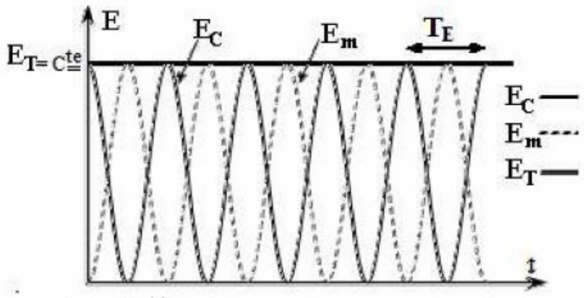
L'énergie totale dans un circuit LC est constante et est égale à l'énergie électrique initiale (maximale)

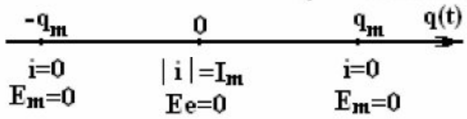


T_0=2.T_E

T_0 : période propre

T_E : période des énergies





NB :

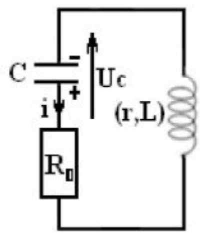
T_0 = 2.Te : La période propre des oscillations électriques T_0 est le double de la période des énergies Te

II.Etude du circuit RLC

1. Décharge d'un condensateur dans une bobine

Le montage est constitué de :

- Un condensateur de capacité C, initialement chargé et porteur de la charge q_0 et une tension U_0=E
- Une bobine de coefficient d'induction L et de résistance interne r
- Un conducteur ohmique de résistance R_0 La résistance totale du circuit est R = R_0 + r



2. Equation differentielle :

En appliquant la loi d'additivité des tensions $U_R + Uc + U_L = 0$ et les transitions :

$$U_R = R_0 i = R_0\frac{dq}{dt} = R_0 C.\frac{dUc}{dt} \quad \text{et} \quad U_L = r.i + L\frac{di}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

On aboutit à l'équation différentielle vérifié par une variable donnée :

$$q = C.Uc \quad \text{et } i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{dUc}{dt}$$

Variable Uc:

$$R.i + Uc + L.\frac{di}{dt} = 0 \quad \text{donc} \quad R.C.\frac{dUc}{dt} + Uc + L.C.\frac{d^2Uc}{dt^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2Uc}{dt^2} + \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}}.\frac{\mathbf{dUc}}{\mathbf{dt}} + \frac{1}{L.C}Uc = 0$$

Variable q:

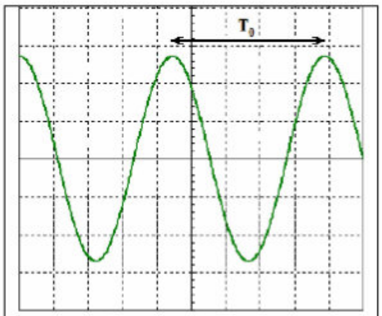
$$R.i + Uc + L.\frac{di}{dt} = 0 \quad \text{donc} \quad R.\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} + L.\frac{d^2q}{dt^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}}.\frac{\mathbf{dq}}{\mathbf{dt}} + \frac{1}{L.C}q = 0$$

La grandeur $\frac{R}{L}.\frac{dUc}{dt}$ ou $\frac{R}{L}.\frac{dq}{dt}$

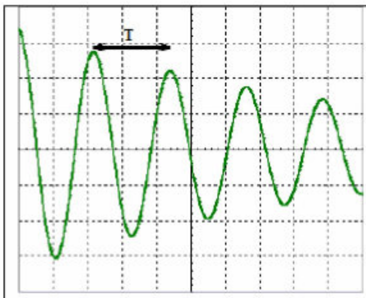
- Concrétise le caractère non-oscillatoire du système (l'amortissement des oscillations électriques)
- Détermine le régime des oscillations (periodique, pseudo périodique ou apériodique)

La résistance est le dipôle qui influe sur l'amplitude des oscillations, quand la résistance **R** du circuit est **:**

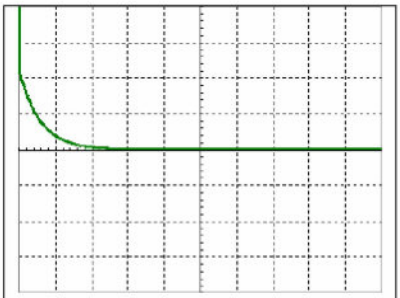
- **Faible** les oscillations du système sont amorties, le régime est **pseudopériodique**.
- **Élevée** le système n'oscille pas et donc le régime est apériodique



Régime périodique
T_0 : la période



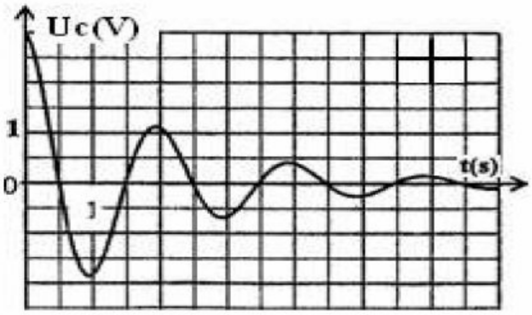
Régime pseudo périodique
T : la pseudo période



Régime apériodique

NB :
La période et la pseudo période sont considérés souvent égales $\mathbf{T \approx T_0 = 2.\pi.\sqrt{L.C}}$

3. Courbe de la tension du condensateur (Régime pseudo périodique :



L'amplitude des oscillations diminue au cours du temps

La cause : La résistance est le dipôle qui influe sur l'amplitude des oscillations

L'explication : Dissipation (perte) progressivement de l'énergie (initialement emmagasinée dans le condensateur) en énergie thermique par effet joule dans les résistances.

NB :
L'amortissement est d'autant plus important que la résistance est élevée

Un circuit électrique RLC, réalisé avec un condensateur chargé, est le siège d'oscillations électriques libres amorties.

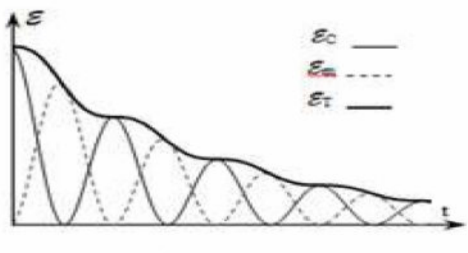
4. Transfert d'énergie entre le condensateur et la bobine :

on sait que : $E_T = Ee + Em = \frac{1}{2}C.U_C^2 + \frac{1}{2}L.i^2$; $(f^n)' = n.f^{n-1}.f'$ et $f^2 = 2.f.f'$ et on dérive $\frac{dE_T}{dt} = C.\frac{dUc}{dt}\left(\mathbf{Uc + L.C.\frac{d^2Uc}{dt^2}}\right)$

on a d'après l'équation déffentielle : ; $R.C.\frac{dUc}{dt} + Uc + L.C.\frac{d^2Uc}{dt^2} = 0$ avec $\mathbf{Uc + L.C.\frac{d^2Uc}{dt^2}} = -R.C.\frac{dUc}{dt}$

$\frac{dE_T}{dt} = C.\frac{dUc}{dt}\left(-R.C.\frac{dUc}{dt}\right)$ donc $\frac{dE_T}{dt} = R.(C.\frac{dUc}{dt})^2$ puisque $i = C.\frac{dUc}{dt}$ Alors $\frac{dE_T}{dt} = -R.i^2 < 0$

NB : $\mathbf{\frac{dE_T}{dt} = -R.i^2 < 0}$

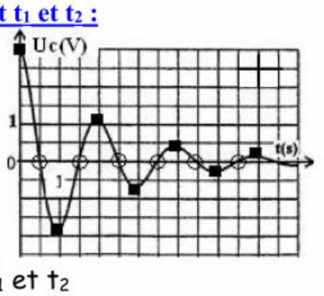


- Les oscillations correspondent à un échange énergétique entre le condensateur et la bobine : Il y a conversion d'énergie électrique en énergie magnétique et réciproquement.
- **Le circuit (RLC) est dissipatif d'énergie** son énergie totale E_T diminue au cours du temps.

- Le phénomène d'amortissement résulte de la dissipation (perte) de l'énergie totale dans le circuit sous forme d'énergie thermique par effet joule

Comment calculer l'énergie dissipée entre deux instant t_1 et t_2 :

Points spécifiques sur la figure	Uc	i	E_e	E_m	E_T
■	Uc_m	0	$E_e = \frac{1}{2}C.U_{Cmax}^2$	0	$E_T = \frac{1}{2}C.U_{Cmax}^2$
○	0	I_m	0	$E_m = \frac{1}{2}L.I_{max}^2$	$E_T = \frac{1}{2}L.I_{max}^2$



$\Delta E_T = E_T(t_2) - E_T(t_1)$: L'énergie dissipée par effet joule entre les instants t_1 et t_2

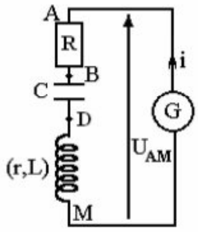
5. Entretien des oscillations

Entretenir des oscillations dans un circuit c'est lui fournir de l'énergie pour compenser les pertes par effet Joule dans les résistances, alors on ajoute au circuit un générateur de tensions

$$U_{AM} = U_{AB} + U_{BD} + U_{DM}$$

$$U_{AM} = R.i + \frac{q}{C} + r.i + L.\frac{di}{dt}$$

$$U_{AM} = (R + r).\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} + L.\frac{d^2q}{dt^2}$$



On en déduit l'équations différentielle :

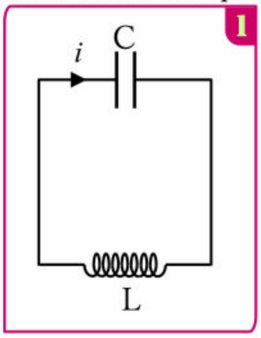
$$\ddot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\mathbf{R+r}}{\mathbf{L}}\dot{\mathbf{q}} - \frac{\mathbf{UAM}}{\mathbf{L}}\right) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L.C}}.\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

Si U_{AM}=(R+r).i La tension au borne du générateur est proportionnelle à l'intensité de courant et que le coefficient de proportionnalité est (R+r) alors $\ddot{\mathbf{q}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L.C}}.\mathbf{q} = \mathbf{0}$

Conclusion :
Le générateur fournit au circuit l'énergie nécessaire pour compenser l'énergie dissipée (perdue) par effet Joule à condition que U_{AM}=(R+r).i

EXERCICE 1 — 25 min

On réalise le montage schématisé ci-contre. Le condensateur de capacité *C* est initialement chargé. La tension à ses bornes est égale à 5,0 V. La bobine d'inductance *L* a une résistance négligeable. Ainsi on considère que la résistance totale du circuit est négligeable.



❶Établir l'équation différentielle que vérifie la tension u_C aux bornes du condensateur après la fermeture de l'interrupteur K.

❷On rappelle que la période propre d'un dipôle (*L, C*) est $T_o=2.\pi.\sqrt{L.C}$
Pour le dipôle étudié, la valeur calculée est $T_o = 4.10^{-3}$s.
Un ordinateur muni d'une carte d'acquisition permet de visualiser l'évolution de la tension aux bornes du condensateur u_C. Le début de l'enregistrement est synchronisé avec la fermeture de l'interrupteur (*t* = 0).

a. Représenter, l'allure de la tension observée sur l'écran.

b. On remplace le condensateur par un autre de capacité $C' = 4\ C$, en conservant la même bobine. Exprimer la nouvelle période propre T_o' en fonction uniquement de T_o.

❸Donner les expressions des énergies emmagasinées par le condensateur et par la bobine.
Laquelle de ces deux énergies est nulle à *t* = 0 ? Justifier. A quelle date, l'autre énergie sera-t-elle nulle pour la première fois ?

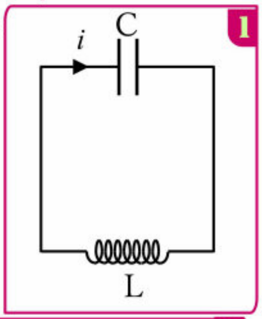
❹En réalité, la résistance totale du circuit est faible mais pas négligeable.

a. Quelle conséquence cela a-t-il d'un point de vue énergétique ? Justifier.

b. Comment qualifie-t-on ce régime ?

EXERCICE 2 — 35 min

On réalise la décharge d'un condensateur dans la bobine précédente $(L=0,1H)$ dans deux cas :

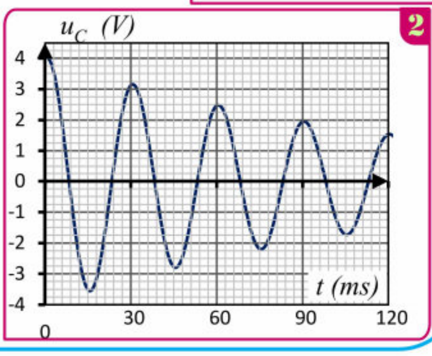


Premier cas : On utilise un condensateur de capacité *C* initialement chargée sous la tension U_0(fig.1). On note $q(t)$ la charge du condensateur à l'instant t.

❶Etablir l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$.

❷Déterminer la valeur de *C* sachant que le circuit est le siège d'oscillations électriques libres non amorties, de période propre $T_0=2\ ms$. On prend $\pi^2=10$.

Deuxième cas : On utilise le condensateur précèdent de capacité *C* initialement chargée sous la tension $U_0=4V$, et on l'associe à la bobine précédente montée en série avec un conducteur ohmique de résistance *R* réglable et un interrupteur ouvert. On règle la résistance du conducteur ohmique sur la valeur R_0, et on ferme le circuit à l'instant $t_0=0$.



A l'aide d'un système d'acquisition informatique, on suit la tension $u_C(t)$ entre les bornes du condensateur, on obtient le graphe de la figure (2).

❸Nommer le régime d'oscillations que montre le graphe.