Le Dipôle RC

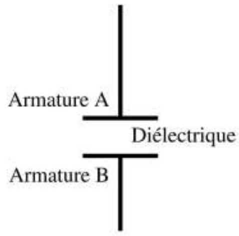
Résumé:5	Niveaux:SM PC SVT

Dipôle RC : association série d'un conducteur ohmique de résistance R et d'un condensateur de capacité C

1. Condensateur :

Description.

Un condensateur est un dipôle constitué de deux armatures métalliques parallèles, placées à des potentiels différents et séparées par un isolant ou un diélectrique.



Relation charge-tension.

La charge d'un condensateur, notée q, est liée à la tension U par la relation :

$\mathbf{q = C.U}$	Avec :	C : capacité du condensateur (F) q : charge du condensateur (C) U : tension (V)

Capacité d'un condensateur :

- Le coefficient de proportionnalité C est appelé capacité du condensateur.
- Son unité est le Farad (F)
- Autres unités du Farad

Millifarad	Microfarad	Nanofarad	Picofarad
$1mF=10^{-3}F$	$1\mu F=10^{-6}F$	$1nF=10^{-9}F$	$1pF=10^{-12}F$

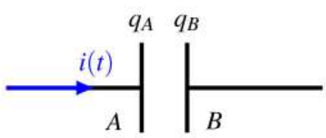
Expression de l'intensité.

Par définition, l'intensité du courant traversant un condensateur est la variation de la charge q au cours du temps.

En adoptant la convention réceptrice pour ce dipôle, on obtient :

Courant continu	Courant variable
$I = \frac{Q}{\Delta t}$	$i = \frac{dq}{dt}$ avec q=C.Uc d'où $i = C.\frac{dU_c}{dt}$

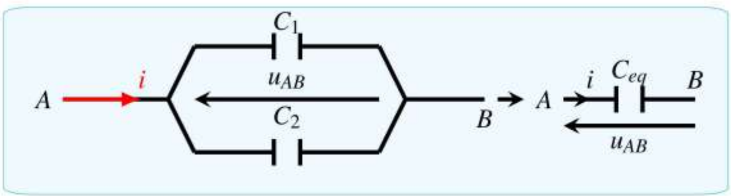
2. Sens conventionnel du courant :



Le sens positif (Conventionnel) du courant est toujours vers l'armature positive.

3. Association des condensateurs :

Association en parallèle



$$C = C_1 + C_2$$

La capacité équivalente C du condensateur équivalent de l'association en parallèle de deux condensateurs est égale à la somme de leurs capacités C_1 et C_2.

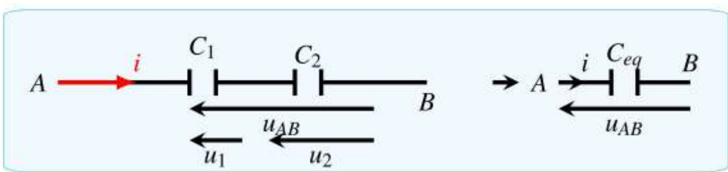
NB :

La capacité équivalente C de plusieurs condensateurs de capacités C_1, C_2, C_3 …C_n montés en parallèle, de capacité est la somme des capacités de chaque condensateur : $\mathbf{C = \Sigma C_i}$

Interet de l'association :

$\mathbf{C = C_1 + C_2}$: L'intérêt de l'association en parallèle des condensateurs est d'obtenir une capacité équivalente supérieure à la plus grande d'entre elles. $\mathbf{C > C_1}$ et $\mathbf{C > C_2}$

Association en série :



La capacité équivalente C du condensateur équivalent de l'association en série de deux condensateurs de capacités C_1 et C_2 est telle que

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \text{et} \quad C = \frac{C_1.C_2}{C_1+C_2}$$

NB :

La capacité équivalente C du condensateur équivalent de l'association en série des condensateurs de capacités C_1, C_2, C_3 …C_n, montés en série, vérifie la relation : $\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots ... + \frac{1}{C_n}$

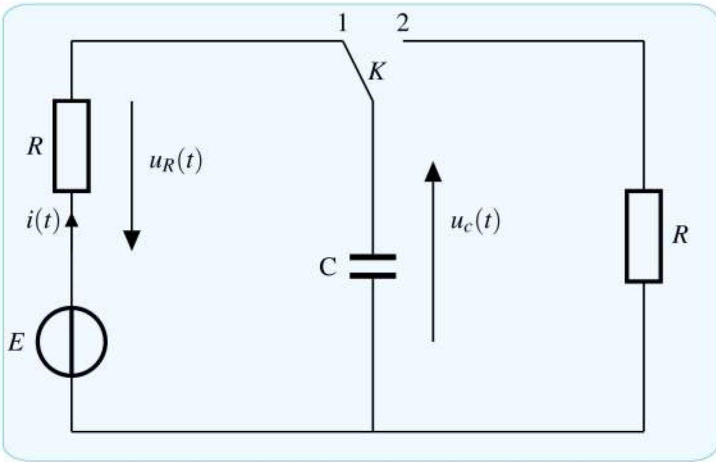
Interetmdel'association :

$C = \frac{C_1.C_2}{C_1+C_2}$: L'intérêt de l'association en parallèle des condensateurs est d'obtenir une capacité équivalente inferieure à la plus petite d'entre elles. $\mathbf{C < C_1}$ et $\mathbf{C < C_2}$

4. Charge d'un condensateur :

Montage de la charge :

Interrupteur K sur la position (1)



Equation différentielle :

En appliquant la loi d'additivité des tensions $U_R + U_C = E$ et les transitions $U_R = R.i = R.\frac{dq}{dt} = R.C.\frac{dU_c}{dt}$

On aboutit à l'équation différentielle vérifié par une variable donnée

Variable la tension du condensateur Uc: $\mathbf{U_c + R.C.\frac{dU_c}{dt} = E}$

Variable la charge q: $\frac{q}{C} + R.\frac{dq}{dt} = E$ Ou $\mathbf{q + R.C.\frac{dq}{dt} = E.C}$

Equation horaire :

On montre , en mathématique , que la solution de cette équation différentielle est : $u_C(t) = Ae^{-\alpha t} + B$

telle que A , B et α des constantes que peut les déterminer

•Détermination de A et B

En portant cette solution dans l'équation différentielle , on détermine la constante α et la constante B .

$$R\ C\frac{du_C}{dt} + u_C = E \Leftrightarrow R\ C(-\alpha Ae^{-\alpha t}) + Ae^{-\alpha t} + B = E$$

$$\Leftrightarrow Ae^{-\alpha t}(1 - R\ C\alpha) + B = E$$

d'où

$$1 - R\ C\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{R\ C}$$

$$B = E$$

donc la solution peut s'écrire sous la forme suivante : $u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{R_1 C}} + E$

•Les conditions initiales

En considérant les conditions initiales à l'instant $t = 0$ on a $u_C(0) = 0$ on détermine A car $u_C(t)$ est une fonction continue à chaque instant t du fonctionnement du condensateur parmi eux la date t=0 :

$u_C(t = 0^+) = u_C(t = 0^-) = 0 \Longrightarrow u_C(0) = A + E \Longrightarrow A = -E$ Donc la solution s'écrit : $\boxed{u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$

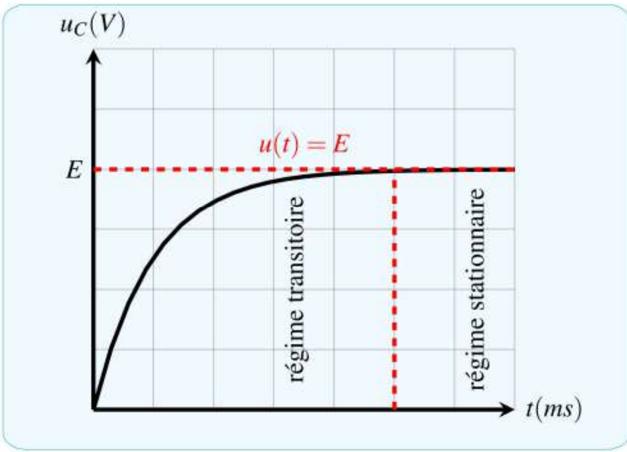
avec $\tau = R\ C$ qu'on l'appelle la constante du temps du dipôle RC

NB :

Souvent la solution est $Uc(t) = A.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ dont la dérivée première est $\frac{dUc(t)}{dt} = A.\left(-\frac{1}{\tau}\right).e^{-\frac{t}{\tau}} = A.\left(\frac{1}{\tau}\right).e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{A}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}$

La representation de $u_C = f(t)$:

Mathématiquement la courbe qui représente $u_C = f(t)$ est la suivante tel que à $t = 0$ on a $u_C(0) = 0$ et quand $t \longmapsto \infty$ on a $u_c = E$, pratiquement on considère $t > 5\tau$ on a $u_C(\infty) = E$
La courbe présente deux régime :
Un régime transitoire : la tension $u_c(t)$ varie au cours du temps .
Un régime stationnaire ou régime permanent où $u_C(t)$ reste constante et égale à E



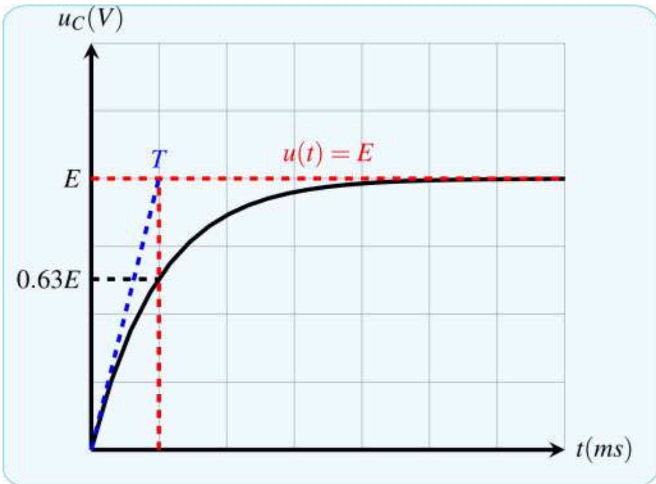
Dètermanition de la constante du temps τ :

Première méthode :
On utilise la solution de l'équation différentielle :

$$u_C(t = \tau) = E(1 - e^{-1}) = 0,63E$$

τ est l'abscisse qui correspond à l'ordonnée $0,63E$

Deuxième méthode : utilisation de la tangente à la courbe à l'instant t=0 .



Unité de la constante du temps τ :

D'après l'équation des dimensions , on a $[\tau] = [R].[C]$

d'autre part $[R] = \dfrac{[U]}{[I]}$ et $[C] = \dfrac{[I]}{[U]}.[t]$ donc $\boxed{[\tau] = [t]}$
La grandeur τ a une dimension temporelle , son unité dans SI est le seconde (s) .

Expression de l'intensité du courant de chrage $i(t)$:

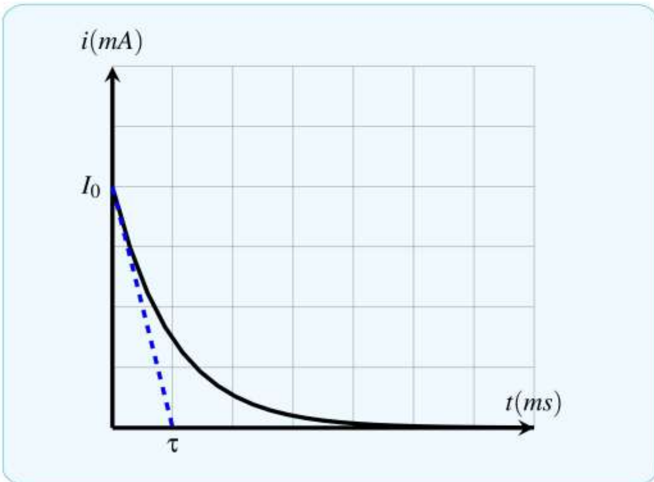
On sait que l'intensité du courant de charge : $i(t) = C\dfrac{du_C}{dt}$ tel que
$\dfrac{du_C}{dt} = \dfrac{E}{R_1C}e^{-t/\tau}$
donc :

$$i(t) = \frac{CE}{R_1C}.e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R_1}e^{-t/\tau}}$$

tel que E/R_1 représente l'intensité de courant à l'instant $t = 0$ c'est à dire à $t = 0$ on a $u_C = 0$ donc $E = R_1.I_0$ i.e $I_0 = \dfrac{E}{R_1}$

$$\boxed{i(t) = I_0e^{-t/\tau}}$$



5. Décharge d'un condensateur :

Montage de la charge :

Interrupteur K sur la position (2)

Equation différentielle :

En appliquant la loi d'additivité des tensions $U_R + U_C = 0$ et les transitions

$$U_R = R.i = R.\frac{dq}{dt} = R.C.\frac{dU_c}{dt}$$

On aboutit à l'équation différentielle vérifié par une variable donnée

Variable Uc:

$$\mathbf{U_c + R.C.\frac{dU_c}{dt} = 0}$$

Variable q:

$$\mathbf{\frac{q}{C} + R.\frac{dq}{dt} = 0} \quad \text{Ou} \quad \mathbf{q + R.C.\frac{dq}{dt} = 0}$$

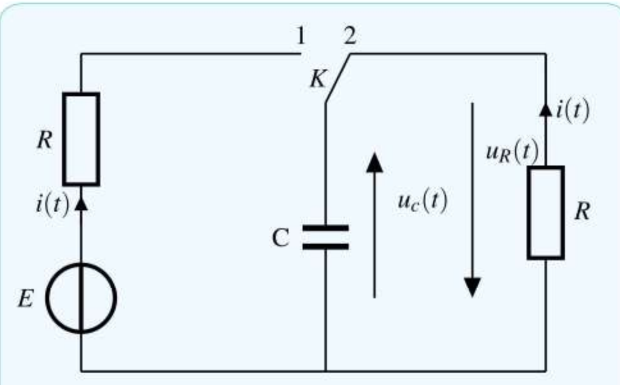


figure 4

Equation horaire :

On considère Uc(t) comme variable et la solution de l'équation différentielle $\mathbf{Uc(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + B}$

- Pour déterminer les constantes **A ,B et τ** , on remplace la solution et sa dérivée première dans l'équation différentielle

$Uc(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + B$ et $\frac{dUc(t)}{dt} = A.\left(-\frac{1}{\tau}\right).e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{A}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}$ $U_c + R.C.\frac{dU_c}{dt} = 0$: équation différentielle vérifiée par Uc

$A.e^{-\frac{t}{\tau}} + B + R.C.\left(-\frac{A}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = 0$ et $A.e^{-\frac{t}{\tau}} + B - R.C.A.\frac{1}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$ donc $\mathbf{A.e^{-\frac{t}{\tau}}\left(1 - R.C.\frac{1}{\tau}\right) + B = 0}$

Par Egalité de deux fonctions polynomiales, l'équation est exacte si : **B = 0** et $\mathbf{(1 - R.C.\frac{1}{\tau}) = 0}$ d'où **τ = R.C**

- Déterminer la constante **A** par les conditions initiales :

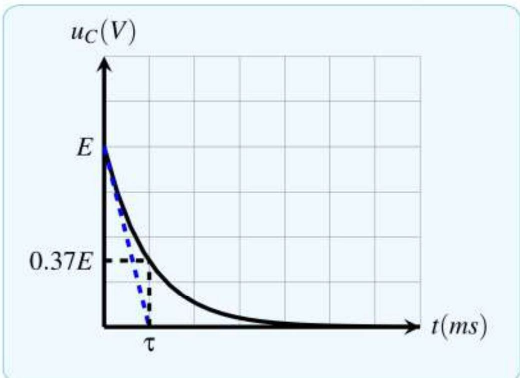
à t=0 la tension Uc(0)= E , on remplace dans l'équation horaire et on obtient : $\mathbf{Uc(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + B}$

$E = A.e^0 + B = A + B$, $E = A + B$ et $A = E$ vu que $B = 0$

Conclusion : A=E , B=0 et τ = R.C alors $\mathbf{Uc(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + B = E.e^{-\frac{t}{\tau}} + 0 = E.e^{-\frac{t}{\tau}}}$

La representation de $u_C = f(t)$:

Mathématiquement la courbe qui représente $u_C = f(t)$ est la suivante tel que à $t = 0$ on a $u_C(0) = E$ et quand $t \longmapsto \infty$ on a $u_c = 0$, pratiquement on considère $t > 5\tau$ on a $u_C(\infty) = 0$



Dètermanition de la constante du temps τ :

Première méthode :

On utilise la solution de l'équation $u_C(V)$ différentielle :

$u_C(t = \tau) = Ee^{-1}) = 0,37E$

Deuxième méthode : utilisation de la tangente à la courbe à l'instant t=0 . On a :

Expression de l'intensité du courant de chrage $i(t)$:

On a $u_C(t) = Ee^{-t/\tau}$

d'après la loi d'additivité des tensions : $u_R = -u_C(t)$ i.e : $u_R(t) = -Ee^{-t/\tau}$ et puisque $u_R = Ri(t)$ c'est à dire $i(t) = -\frac{E}{R}e^{-t/\tau}$

5.Energie électrique stockée dans un condensateur.

L'énergie électrique stockée par un condensateur est :

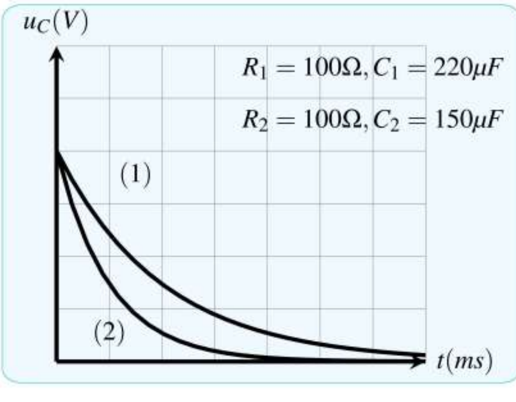
$$\boxed{\mathscr{E}_e = \frac{1}{2}C.u_C^2 = \frac{1}{2}.\frac{q^2}{C}}$$

E_e s'exprime en joule (J) avec C en farad (F), u_C en volt (V) et q en coulomb (C) .

6. L'influence de τ sur la durée de la décharge

f. l'influence de sur la durée de la décharge

On suppose que $\tau_1 > \tau_2$, on obtient la représentation graphique suivante : Quelle est l'influence de τ sur la décharge du condensateur dans le dipôle RC



NB :

- τ = R.C : Constante de temps et est homogène à un temps
- Conditions initiales (à t=0) :

Charge d'un condensateur :	**Uc(0) = 0** ,	**q(0) = 0** ,	$I(0) = I_0 = \frac{E}{R}$
Décharge d'un condensateur :	**Uc(0) = E** ,	**q(0) = C.E** ,	$I(0) = -I_0 = -\frac{E}{R}$