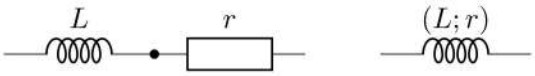
CHAPITRE VII

DIPÔLE RL

1 La bobine.

1.1 Définition et symbole.

La bobine est un dipôle constitué d'un enroulement non connecté de fil conducteur de cuivre autour d'un noyau.
Symbole de la bobine est :



tel que :

- ✓ r **:** la résistance interne de la bobine.
- ✓ L **:** l'inductance de la bobine, son unité dans $(S.I)$ est **Henry** H

1.2 Tension aux bornes de la bobine.

L'expression de la tension u_L aux bornes d'une bobine de résistance r et d'inductance L est :

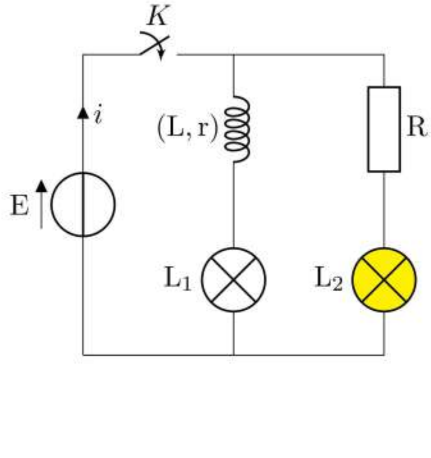
$$\boxed{u_L = ri + L.\frac{di}{dt}}$$

- ☞ u_L : tension aux bornes de la bobine (V)
- ☞ r : résistance interne Ω.
- ☞ L : Inductance de la bobine (H)
- ☞ i : intensité du courant (A)

Remarque : Dans le régime permanent, l'intensité de courant est constante $i = Cte$ donc $\frac{di}{dt} = 0$ c-à-d $u_L = ri$.
☞ En courant continue, la bobine se comporte comme un conducteur ohmique.

1.3 L'influence de la bobine dans un circuit.

On réalise le montage expérimental ci-contre



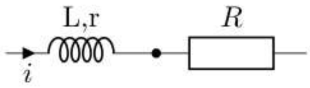
- ☞ Lorsqu'on ferme l'interrupteur, la lampe L_1 ne brille pas instantanément, mais s'allume avec un retard par rapport la lampe L_2.
- ☞ Lorsqu'on ouvre l'interrupteur, la lampe L_1 s'éteint avec un retard par rapport la lampe L_2.

  Conclusion : La bobine résiste **l'établissement** ou **l'annulation** du courant qui la traverse.

2 Dipôle RL.

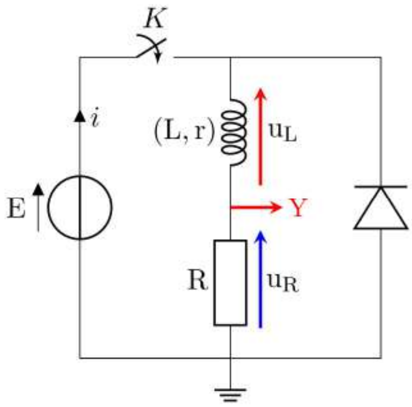
2.1 Définition

Le dipôle RL est l'association en série d'un conducteur ohmique de résistance R et d'une bobine son inductance L et sa résistance interne r.



2.2 Étude expérimentale d'une réponse d'un dipôle RL

On réalise le montage expérimental ci-contre.
On choisit : $R_T = 100\,\Omega\,;\ L = 0,2H\,;\ E = 6V$.
☞ à l'instant $t = 0$ on ferme interrupteur et puis on visualise la variation de l'intensité du courant électrique i qui circulent dans le circuit en fonction du temps, et on obtient la figure 1.
✓ la figure 1 : **l'établissement du courant** : le dipôle RL est soumis a une échelon ascendante de tension.



☞ Lorsque l'intensité de courant est constante, on ouvre l'interrupteur K et on obtient la figure 2.
✓ la figure 2 : **l'annulation du courant** : le dipôle RL soumis a une échelon descendante de tension.

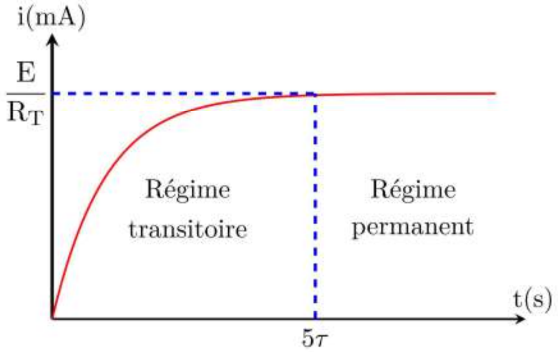


Figure 1

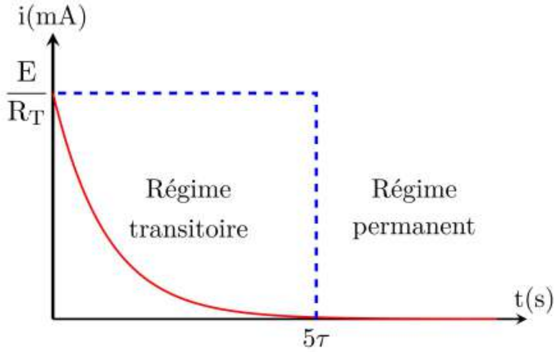


Figure 2

Remarque : Le rôle de la diode :

- ✓ Ne laisse passer le courant que dans un seul sens.
- ✓ Permet d'éviter l'apparition des étincelles dues aux sur tensions aux bornes de la bobine.
- ✓ protège ainsi les composants du circuit qui sont autour de la bobine.

Conclusion

- ✓ L'intensité du courant traversant la bobine est continue : $\forall t\ i(t^+) = i(t^-)$.
- ✓ La durée de l'établissement ou l'annulation du courant est 5τ.
- ✓ On distingue deux régimes :
  - **Régime transitoire** : l'intensité du courant croît ou décroît pour $t < 5\tau$.
  - **Régime permanent** : On l'obtient pour $t > 5\tau$ où l'intensité du courant reste constante et a pour valeur $\dfrac{E}{R_T}$ lors de l'établissement du courant et nulle lors de l'annulation du courant.
- ✓ La durée de l'établissement ou l'annulation du courant augmente lorsque la valeur de L augmente ou la valeur de R diminue.

2.3 Réponse d'un dipôle RL à un échelon montant de tension (établissement du courant).

2.3.1 Équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant.

On considère le circuit électrique ci-contre, à l'origine du temps $t = 0$ on ferme l'interrupteur K.

La résistance totale du dipôle RL est $R_T = R + r$.

On applique la loi d'additivité des tensions : $\boxed{u_R + u_L = E}$ $(\bigstar)$

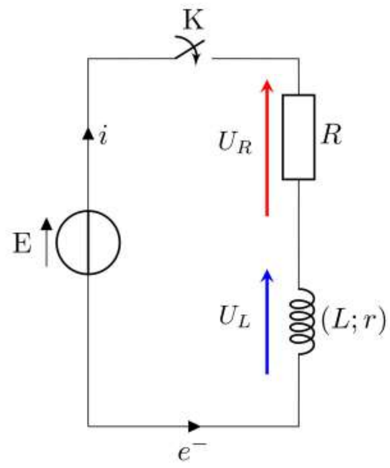
D'après la loi d'ohm : $\boxed{u_R = R.i}$

La tension aux bornes de la bobine est : $\boxed{u_L = ri + L\dfrac{di}{dt}}$

On remplace dans l'équation $(\bigstar)$ et on trouve $\boxed{ri + L\dfrac{di}{dt} + Ri = E}$

C-à-d : $\boxed{L\dfrac{di}{dt} + (r+R)i = E}$ Donc : $\boxed{\dfrac{L}{R_T}.\dfrac{di}{dt} + i = \dfrac{E}{R_T}}$ on pose : $\tau = \dfrac{L}{R_T}$

Enfin : $\boxed{\tau.\dfrac{di}{dt} + i = \dfrac{E}{R_T}}$



Remarque

✓ On a $u_R = R.i \Rightarrow i = \dfrac{u_R}{R} \Rightarrow \boxed{u_L = r.(\dfrac{u_R}{R}) + L.\dfrac{d(\frac{u_R}{R})}{dt}}$ On remplace dans l'équation $(\bigstar)$ et on trouve :

$\boxed{\tau.\dfrac{du_R}{dt} + u_R = \dfrac{E.R}{R_T}}$ C'est l'équation différentielle vérifiée par la tension u_R .

2.3.2 Solution de l'équation différentielle.

La solution de l'équation différentielle $\tau.\dfrac{di}{dt} + i = \dfrac{E}{R_T}$ s'écrit sous la forme : $\boxed{i(t) = A + B.e^{-\alpha.t}}$ telle que : A, B et α sont des constantes.

♠ Détermination des constantes A et α.

On a : $i(t) = A + Be^{-\alpha.t}$ donc $\dfrac{di}{dt} = 0 - B.\alpha.e^{-\alpha.t} = -B.\alpha.e^{-\alpha.t}$

On remplace dans l'équation différentielle : $-\tau.B.\alpha.e^{-\alpha.t} + A + B.e^{-\alpha.t} = \dfrac{E}{R_T}$ c'est à dire $\boxed{B.e^{-\alpha.t}(1 - \tau.\alpha) = \dfrac{E}{R_T} - A}$

Pour que l'équation soit vérifiée quelque soit **t**, il faut que : $\boxed{1 - \tau.\alpha = 0}$ et $\boxed{\dfrac{E}{R_T} - A = 0}$

Donc : $\boxed{\alpha = \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{R_T}{L}}$ et $\boxed{A = \dfrac{E}{R_T}}$

♠ Détermination de B à partir des conditions initiales.

Puisque l'intensité du courant est une fonction continue et selon les conditions initiales $i(t_0) = 0$

On remplace dans la **solution** de l'équation différentielle à $t = 0$: $\boxed{0 = A + B.e^0} \Rightarrow B = -A$ et puisque $A = \dfrac{E}{R_T}$

donc : $\boxed{B = -\dfrac{E}{R_T}}$

Finalement : L'expression de l'intensité du courant traversant le circuit RL est : $\boxed{i(t) = \dfrac{E}{R_T}.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$

Remarque

✔ On a : $u_R = R.i$, D'où l'expression de u_R est :

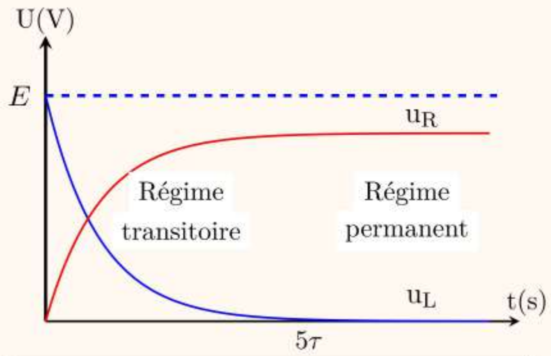
$$\boxed{u_R = \frac{R.E}{R_T}.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$$

✔ L'expression de u_L est : On a $u_L = ri + L.\frac{di}{dt}$

Donc, $\boxed{u_L = \frac{r.E}{R_T}.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + \frac{L.E}{R_T.\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}}$

$\Rightarrow \boxed{u_L = \frac{r.E}{R_T}.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + Ee^{-\frac{t}{\tau}}}$

✔ Si r est négligeable devant R c-à-d $\frac{r}{R_T} \approx 0$, on trouve : $u_L = E.e^{-\frac{t}{\tau}}$



Variation de u_R et u_L en fonction du temps

2.4 Réponse d'un dipôle RL à un échelon descendant : annulation du courant.

2.4.1 Équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant i

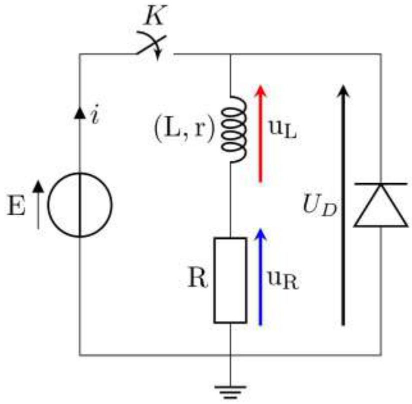
On considère le circuit ci-contre, tel que l'interrupteur est fermé et l'intensité du courant est constante $I_0 = \frac{E}{R_T}$.

à l'instant $t = 0$, on ouvre l'interrupteur K, et on considère que la diode est idéale ($U_D = 0$).
selon la loi d'additivité des tensions : $\boxed{u_R + u_C = 0}$ (★)

Et puisque : $u_R = R.i$ et $u_L = ri + L.\frac{di}{dt}$

On remplace les deux expressions dans l'équation (★) et on trouve : $\boxed{L\frac{di}{dt} + (r + R)i = 0}$ Donc : $\boxed{\frac{L}{R_T}.\frac{di}{dt} + i = 0}$ on pose : $\tau = \frac{L}{R_T}$

Enfin : $\boxed{\tau.\frac{di}{dt} + i = 0}$ C'est L'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant i pendant la rupture du courant.



2.4.2 Solution de l'équation différentielle.

La solution de l'équation différentielle $\tau.\frac{di}{dt} + i = 0$ s'écrit sous la forme : $\boxed{i(t) = A.e^{-m.t}}$ telle que : A et m sont des constantes.

♠ Détermination de m.

On a : $i(t) = A.e^{-mt}$ donc $\frac{di}{dt} = -A.m.e^{-mt}$

On remplace dans l'équation différentielle : $-\tau.A.m.e^{-mt} + A.e^{-mt} = 0$ c'est à dire : $1 - m.\tau = 0$

Ainsi : $\boxed{m = \frac{1}{\tau} = \frac{R_T}{L}}$

♠ Détermination de A à partir des conditions initiales.

à l'instant $t = 0$, on a $I_0 = \frac{E}{R_T}$ (l'intensité du courant $i(t)$ est une fonction continue).

On remplace dans la solution de l'équation différentielle à $t = 0$: $i = A.e^0$ c'est à dire : $\boxed{A = \frac{E}{R_T}}$.

Finalement : L'expression de l'intensité du courant i pendant la rupture du courant est : $\boxed{i(t) = \frac{E}{R_T}.e^{-\frac{t}{\tau}}}$

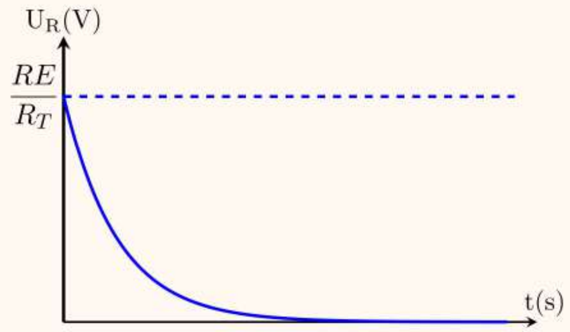
Remarque

✔ On a : $u_R = R.i$, D'où l'expression de u_R est :

$$\boxed{u_R = \frac{R.E}{R_T}.e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

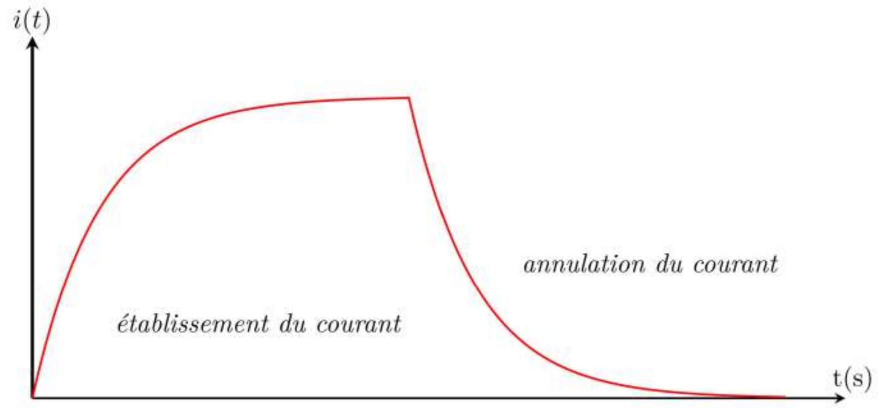
✔ L'expression de u_L est : On a $u_L = -u_R$
Donc,

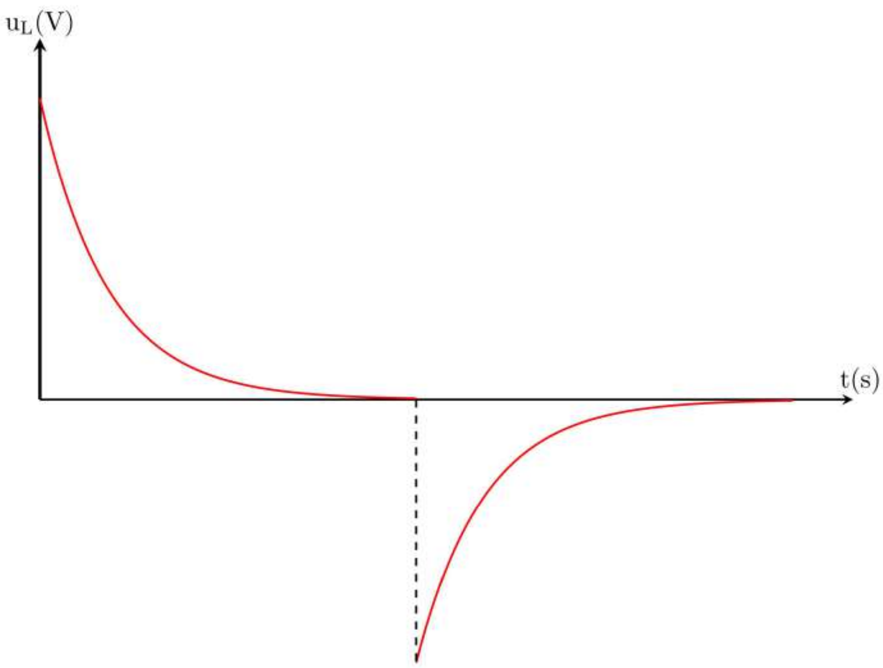
$$\boxed{u_L = -\frac{R.E}{R_T}.e^{-\frac{t}{\tau}}}$$



Variation de u_R en fonction du temps

En resumé :





2.5 Constante de temps τ.

⋆ La constante de temps τ du dipôle RL vaut : $\boxed{\tau = \frac{L}{R_T}}$

2.5.1 Équation des dimensions pour la constante de temps τ.

- Loi d'ohm : $u = R.i$: $[R] = \frac{[u]}{[i]}$

- Pour la bobine : $u_L = L.\dfrac{di}{dt}$: $[L] = \dfrac{[u].[t]}{[i]}$

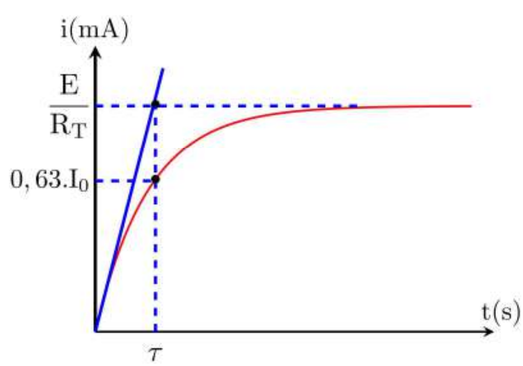
Donc : $\dfrac{[L]}{[R_T]} = \dfrac{\dfrac{[u].[t]}{[i]}}{\dfrac{[u]}{[i]}} = \dfrac{[u]}{[i]}.\dfrac{[i].[t]}{[u]}$ c'est à dire : $\dfrac{[L]}{[R_T]} = [t] = T$

♠ La constante τ a la dimension d'un temps, c'est pour cela elle est appelée **constante de temps**. Elle est exprimée en secondes (**s**).

2.5.2 Détermination de la constante de temps τ.

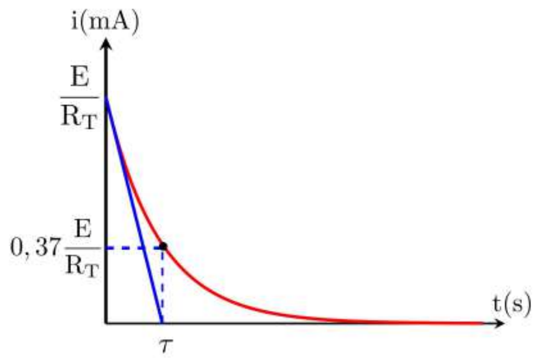
- Pendant l'établissement du courant : $i(t) = \dfrac{E}{R_T}.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$
  - ⋆ **Méthode 1** : à l'instant $t = \tau$, on a : $i(\tau) = \dfrac{E}{R_T}.(1 - e^{-1}) = 0,63 \times \dfrac{E}{R_T}$

    $\rightarrow \tau$ est l'**abscisse** correspondant à l'ordonnée $0,63.\dfrac{E}{R_T}$.
  - ⋆ **Méthode 2** : τ est l'**abscisse** du point d'intersection de la tangente à la courbe au point $t = 0$ et l'asymptote $i = \dfrac{E}{R_T}$.



- Pendant l'annulation du courant : $i(t) = \dfrac{E}{R_T}.e^{-\frac{t}{\tau}}$
  - ⋆ **Méthode 1** : à l'instant $t = \tau$, on a : $i(\tau) = \dfrac{E}{R_T}.e^{-1} = 0,37 \times \dfrac{E}{R_T}$

    $\rightarrow \tau$ est l'**abscisse** correspondant à l'ordonnée $0,37.\dfrac{E}{R_T}$.
  - ⋆ **Méthode 2** : τ est l'**abscisse** du point d'intersection de la tangente à la courbe au point $t = 0$ et l'axe des abscisses.



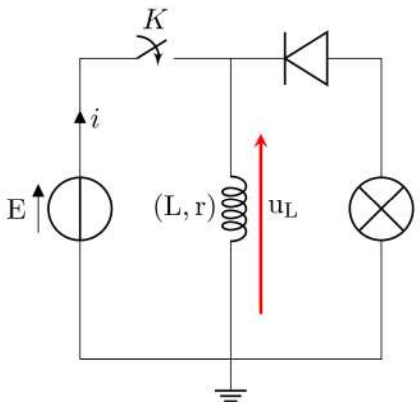
3 Énergie emmagasinée dans la bobine.

3.1 Mise en évidence expérimentale.

On réalise le circuit électrique ci-contre :

- Lorsqu'on ferme l'interrupteur, le courant passe dans la bobine tandis que la diode polarisée dans le sens inverse ne laisse pas passer le courant dans la lampe et cette dernière ne s'allume pas.
- Lorsqu'on ouvre l'interrupteur, l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine est transférée à la lampe et cette dernière s'allume.

Remarque : L'énergie emmagasinée dans la bobine augmente lorsqu'on augmente l'intensité du courant traversant la bobine ou son inductance.



3.2 Expression de l'énergie magnétique emmagasinée $\mathscr{E}_m$ dans la bobine.

La puissance électrique reçue par la bobine lorsque l'interrupteur est fermé est : $\mathscr{P} = u_L.i$

Puisque : $u_L = ri + L\dfrac{di}{dt}$ donc : $\mathscr{P} = ri^2 + Li.\dfrac{di}{dt} = ri^2 + \dfrac{d}{dt}(\dfrac{1}{2}.L.i^2)$

☆ La grandeur ri^2 est la puissance dissipée par effet joule dans la bobine.

☆ La grandeur $\dfrac{d}{dt}(\dfrac{1}{2}.L.i^2)$ est la puissance emmagasinée dans la bobine.

Et puisque : $\mathscr{P} = \dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_\mathrm{m}}{\mathrm{dt}}$, donc l'**énergie électrique emmagasinée dans la bobine** est : $\boxed{\mathscr{E}_m = \dfrac{1}{2}.\mathrm{L}.\mathrm{i}^2}$

Conclusion

l'expression de énergie magnétique emmagasinée dans la bobine est :

$$\boxed{\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}.\mathrm{L}.\mathrm{i}^2}$$

- ☞ $\mathscr{E}_m$: L'énergie magnétique (J)
- ☞ L : Inductance de la bobine (H)
- ☞ i : intensité du courant (A)