Chapitre 7

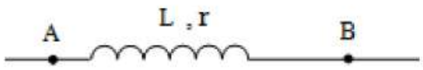
Le dipôle RL

I- La bobine

1- Définition

- Une bobine est un dipôle constitué par un enroulement cylindrique d'un fil conducteur recouvert d'une couche isolante (gaine ou vernie).
- Une bobine est caractérisée par son :
  - Inductance L exprimée en Henry (symbole H)
  - et sa résistance interne r exprimée en Ohm (Ω)

2- Représentation symbolique d'une bobine



3- Expression de la tension aux bornes d'une bobine

La bobine étant orientée de A vers B, la tension $U_L(t)$ aux bornes de la bobine est donnée par la relation :

$$\boldsymbol{U_L(t) = L.\frac{di(t)}{dt} + r.i(t)}$$

Avec :

- $U_L(t)$: tension aux bornes de la bobine en volts (V)
- L : Inductance de la bobine en Henrys (H)
- r : Résistance interne de la bobine en Ohm (Ω)
- $i(t)$: Intensité du courant traversant la bobine en Ampères (A)

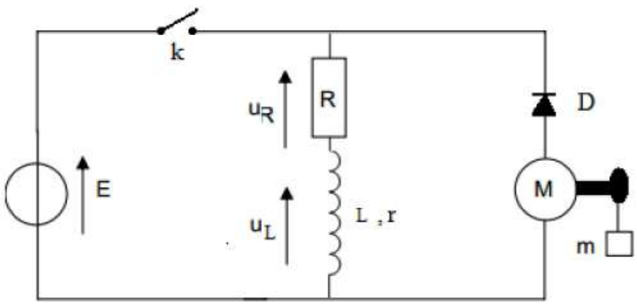
Si la résistance de la bobine n'est pas négligeable, celle-ci peut être considérée comme l'association en série d'un conducteur ohmique de résistance r et d'une bobine de résistance nulle.

Remarque : Les différents comportements d'une bobine

- Lorsque l'intensité du courant traversant la bobine est constante, la tension entre ses bornes vaut : $\boldsymbol{U_L = r.i}$
- Si l'intensité du courant augmente, i(t) est une fonction croissante du temps, donc la tension $U_L(t)$ augmente aussi,
- Si la variation de i(t) est très rapide, $\frac{di(t)}{dt}$ peut prendre une valeur très importante, il en est de même pour $L.\frac{di(t)}{dt}$; une tension important peut alors apparaître entre les bornes de la bobine, c'est le phénomène de la surtension.
- Cette surtension momentanément provoque une étincelle aux bornes de l'interrupteur, pouvant être dangereuse pour les composants du circuit. Un système de protection est indispensable (diode, condensateur…).

II- Energie emmagasinée par la bobine

1- Mise en évidence expérimentale



On réalise un circuit électrique comportant en série un conducteur ohmique de résistance R, une bobine b d'inductance L et de résistance interne supposée nulle, un interrupteur k et un moteur (M). Le circuit est alimenté par un générateur de tension de force électromotrice (f.e.m) : E

Une fois le courant établi dans la branche comportant le dipôle RL, à l'ouverture de l'interrupteur k, le moteur tourne en soulevant la masse marquée « m » : la bobine est à l'origine de l'établissement d'un courant électrique dans le circuit (dans la deuxième branche), elle avait donc auparavant emmagasiné de l'énergie.

2- Expression d'énergie emmagasinée par la bobine

On a : $\boldsymbol{U_L(t) = L.\frac{di(t)}{dt} + r.i(t)}$

Donc la puissance fournie à la bobine : $P = U_L(t).i(t) = L.\frac{di(t)}{dt}.i(t) + r.[i(t)]^2$ avec : $P = \frac{dE}{dt}$

Pendant l'établissement du courant dans le circuit, l'énergie fournie par la source est :

$$\int_0^t U_L.i(t).dt = \int_0^t R.i(t)^2.dt + \int_0^t L.i(t).\frac{di(t)}{dt}.dt$$

On voit que cette énergie est consommée en partie par effet Joule dans le conducteur ohmique et en partie stockée dans la bobine sous forme d'énergie électromagnétique (magnétique).

L'énergie stockée dans la bobine est :

$$E_m(t) = \int_0^t L.i(t).di(t)$$

L'énergie magnétique stockée dans la bobine d'inductance L et parcourue par un courant d'intensité i(t) est :

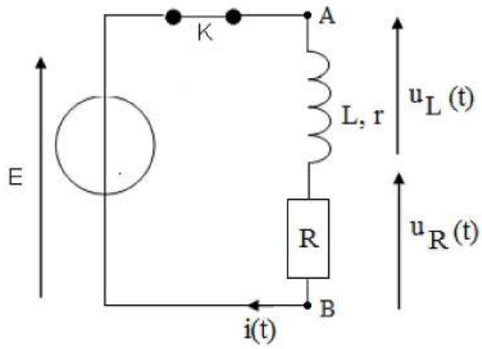
$$\boldsymbol{E_m(t) = \frac{1}{2}.L.i^2(t)}$$

III- Réponse d'un dipôle (RL) à un échelon montant de tension

1- Le dipôle RL

Un dipôle RL est constitué de l'association d'un conducteur ohmique de résistance R et d'une bobine de résistance interne r et d'inductance L.

2- Etablissement du courant :



Un dipôle RL subit un échelon de tension lorsque l'on ferme l'interrupteur k du circuit dans lequel un générateur de tension continue E est branché en dérivation aux bornes du dipôle RL. La tension U_{AB} passe brutalement de 0 V à E V.

3- L’équation différentielle vérifiée par l’intensité du courant i(t) :

D’après la loi d’additivité des tensions : $U_L + U_R = E$

$$L.\frac{di(t)}{dt} + r.i(t) + R.i(t) = E$$

$$L.\frac{di(t)}{dt} + (r + R).i(t) = E$$

$$L.\frac{di(t)}{dt} + R_T.i(t) = E$$

D’où l’équation différentielle vérifiée par l’intensité du courant i(t) dans le circuit est :

$$\boldsymbol{\frac{L}{R_T}.\frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{E}{R_T}} \quad ; \quad \text{avec : } R_T = r + R$$

4- Solution de l’équation différentielle

L’équation différentielle linéaire du premier ordre en i(t) à coefficients constants et avec second membre non nul peut admettre comme solution : $\boldsymbol{i(t) = A + B.e^{-\frac{t}{\tau}}}$ où A, B et τ sont des constantes à déterminer.

<u>Exercice d’application</u> :

1. Montrer que la solution de l'équation différentielle $\frac{L}{R_T}.\frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{E}{R_T}$ s’écrit sous la forme :

$\boldsymbol{i(t) = Ip.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$ en déterminant l’expression de $\boldsymbol{I_P}$ et de la constante de temps $\boldsymbol{\tau}$

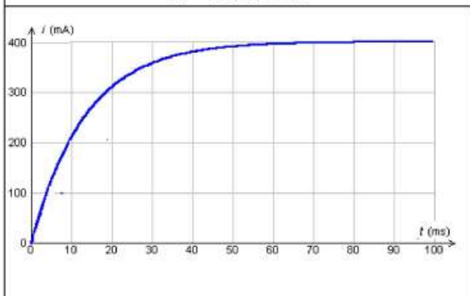
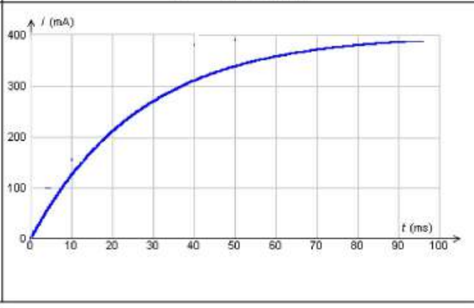
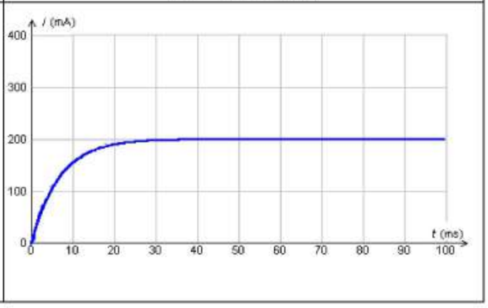
2. Que représente I_P ?

3. Par analyse dimensionnelle, montrer que la constante de temps τ à la dimension d’un temps.

<u>Remarque</u> : détermination de la constante de temps τ :

- **Par calcul :** si on connaît les valeurs des résistances R du conducteur ohmique et r de bobine et de l’inductance L de la bobine.
- **Graphiquement :** à partir de la courbe i = f(t) ayant comme équation : $i(t) = Ip.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$.
  - Nous avons à t = τ : <u>$i(t = \tau) = 0{,}63.I_P$</u>
  - Le tracé de la tangente à la courbe i = f(t) à t = 0 permet de mettre en évidence un point d’intersection entre l’asymptote horizontale d’équation $i(t)=I_p$ et la tangente; l’abscisse de ce point d’intersection a pour valeur: t=τ.

5- Influence des caractéristiques du circuit sur la constante de temps lors de l’établissement d’un courant

<table>
<tr><td>E= 6 V ; r = 5 ; R = 10 et
L = 200 mH</td><td>E= 6 V ; r = 5 ; R = 10 et
L = 400 mH</td><td>E= 6 V ; r = 5 ; R = 25 et
L = 200 mH</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Année scolaire : 2020-2021

6- Evolution de la tension aux bornes de la bobine

La tension aux bornes de la bobine est définie par :

- $\mathbf{U_L = L.\frac{di}{dt} + r.i}$ ou : $\mathbf{U_L = L.\frac{di}{dt}}$
- $U_L + U_R = E \Leftrightarrow U_L = E - U_R \Leftrightarrow \mathbf{U_L = E - R.i}$

Avec : $i(t) = Ip.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

Pour une bobine idéale (de résistance interne r nulle) :

$U_L = L.\frac{di}{dt}$ et $R_T = R$ d'où : $\tau = \frac{L}{R}$

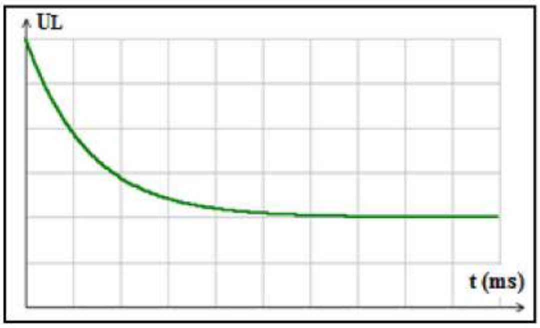
Donc :

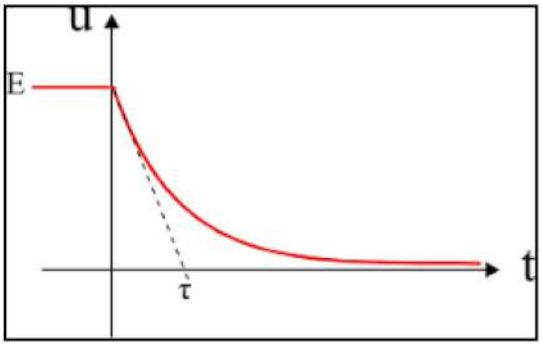
$U_L = E - R.i \Leftrightarrow U_L = E - R.I_P.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

$\Leftrightarrow U_L = E - R.\frac{E}{R}.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = E.e^{-\frac{t}{\tau}}$

d'où : $\mathbf{U_L = E.e^{-\frac{t}{\tau}}}$

Contrairement à la courbe i(t), la courbe de $U_L(t)$ présente une discontinuité à l'instant t = 0, correspondant à la fermeture du circuit.





IV - Réponse d'un dipôle (RL) à une rupture du courant

1- L'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant i(t) :

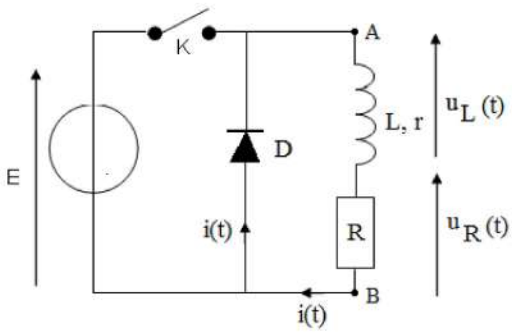
A l'ouverture de l'interrupteur k, la tension aux bornes du dipôle RL passe brutalement de E V à 0 V.

D'après la loi d'additivité des tensions : $U_L + U_R = 0$

$$L.\frac{di(t)}{dt} + r.i(t) + R.i(t) = 0$$

$$L.\frac{di(t)}{dt} + (r + R).i(t) = 0$$

$$L.\frac{di(t)}{dt} + R_T.i(t) = 0$$



D'où l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant i(t) dans le circuit est :

$$\mathbf{\frac{L}{R_T}.\frac{di(t)}{dt} + i(t) = 0} \quad ; \quad \text{avec : } R_T = r + R$$

2- Solution de l'équation différentielle

L'équation différentielle linéaire du premier ordre en i(t) à coefficients constants et avec second membre non nul peut admettre comme solution : $\boldsymbol{i(t) = A + B.e^{-\frac{t}{\tau}}}$ où A, B et τ sont des constantes à déterminer.

<u>**Exercice d'application**</u> :

Montrer que la solution de l'équation différentielle $\frac{L}{R_T}.\frac{di(t)}{dt} + i(t) = 0$ s'écrit sous la forme : $\mathbf{i(t) = I_P.e^{-\frac{t}{\tau}}}$ avec : $\boldsymbol{\tau = \frac{L}{R_T}}$

<u>***Remarque***</u> : On peut déterminer la constante de temps τ :

- **Par calcul :** si on connaît les valeurs des résistances R du conducteur ohmique et r de bobine et de l'inductance L de la bobine.
- **Graphiquement :** à partir de la courbe i = f(t) ayant comme équation : $i(t) = I_P.e^{-\frac{t}{\tau}}$.
  - Nous avons à t = τ : $i(t = \tau) = 0{,}37.I_P$
  - Le tracé de la tangente à la courbe i = f(t) à t = 0 permet de mettre en évidence un point d'intersection entre cette tangente et l'axe des abscisses (l'axe du temps); l'abscisse de ce point d'intersection a pour valeur: t=τ.