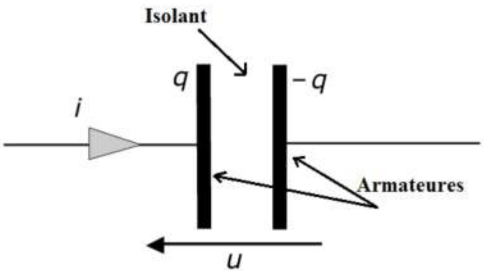
Chapitre 6

Le dipôle RC

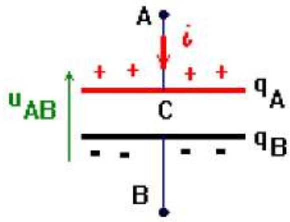
I- Condensateur

1- Définition

- Le condensateur est un composant électronique, constitué de deux armatures conductrices et séparées par un isolant polarisable (ou «diélectrique»). Il a la particularité de pouvoir stocker de l'énergie (des charges électriques opposées sur ses armatures) lorsqu'il est soumis à une tension électrique U.
- La représentation symbolique d'un condensateur est donnée comme le montre le schéma ci-dessus.



- Chaque condensateur est caractérisé par une grandeur appelée capacité de symbole « C » et dont l'unité dans SI est le farad (symbole : F).
- La charge q d'un condensateur représente la quantité d'électricité accumulée sur l'un de ses armateurs :



$q = q_A = - q_B$ ($q_A > 0$; $q_B < 0$)

Relation Charge q - Intensité I	Relation Charge q – Tension U	Relation Tension U – Intensité I
L'intensité du courant électrique I représente le débit de charges électriques (électrons), c'est la quantité d'électricité qui arrive à l'armateur du condensateur par unité de temps : $i = \frac{dq_A}{dt}$	La charge q d'un condensateur est directement proportionnelle à la tension électrique U entre ses bornes : $q(t) = C.U_c(t)$ telle que C est sa capacité	La relation entre la tension électrique U et l'intensité du courant I : $i(t) = C.\frac{dU_C(t)}{dt}$

Remarque :

- C s'exprime en farad (F) ; q en Coulomb (C) ; u_{AB} en Volt (V) et I en Ampère (A).
- La valeur de la capacité C ne dépend que des caractéristiques de l'élément capacitif (nature du diélectrique isolant, surface des armatures, distance entre elles…)

2- Expression de l'énergie stockée dans un condensateur

La puissance électrique reçue par un condensateur est $P=U_c(t).i(t)$, avec $P = \frac{dE_e}{dt}$

D'où l'énergie électrique est : $dE_e = P.dt$ $\Rightarrow$ $dE_e = U_c(t).i(t).dt$ $\Rightarrow$ $dE_e = U_C(t).C.\frac{dU_C(t)}{dt}.dt$

Il s'ensuit de là que: $E_e = \int dE_e = \int C.U_C.dU_C = \frac{1}{2}.C.U_C^2 + k$

En conclusion, l'énergie électrique emmagasinée par un condensateur est : $\mathbf{E_e = \frac{1}{2} C . U_C^2 + k}$; (k = Cte ; et elle représente l'énergie électrique initiale du condensateur).

A t=0, le condensateur est non chargé, donc : $E_e(t=0) = 0$ et $U_c(t=0) = 0$ d'où : k = 0, en fin : $\mathbf{E_e = \frac{1}{2} C . U_C^2}$

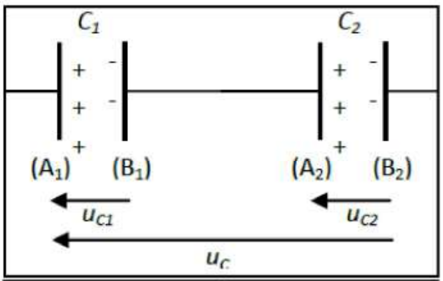
3- Associations de condensateurs

Considérons 2 condensateurs C_1 et C_2 initialement déchargés.

a- Association en série

L'association en série de deux condensateurs C_1 et C_2 se comporte comme un «condensateur unique équivalent» de capacité $C_{éq}$ telle que :

$$\frac{1}{C_{éq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$



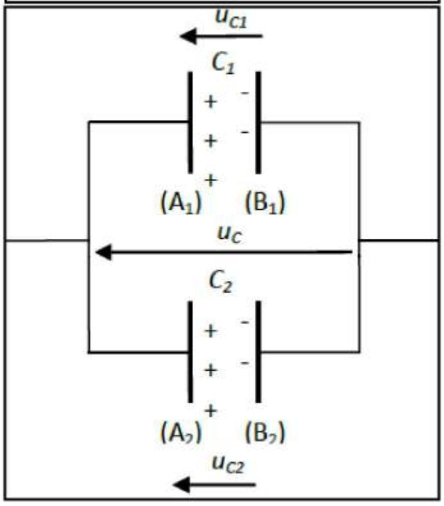
Pour l'association de n condensateur en série :

$$\frac{1}{C_{éq}} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

b- Association en dérivation

L'association en dérivation de deux condensateurs C_1 et C_2 se comporte comme un « condensateur unique équivalent » de capacité $C_{éq}$ telle que :

$$C_{éq} = C_1 + C_2$$



Pour l'association de n condensateur en dérivation :

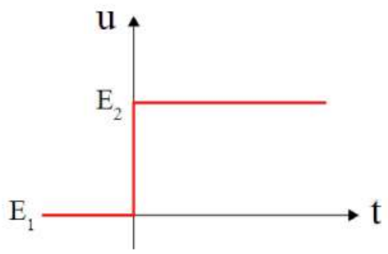
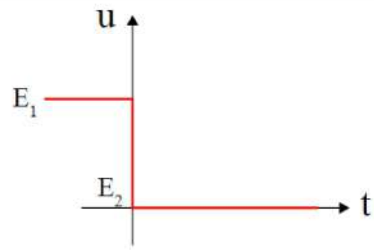
$$C_{éq} = \sum_{i=1}^{i=n} C_i = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

II- Réponse d'un dipôle (RC) à un échelon de tension

L'association en série d'un condensateur de capacité C et d'un conducteur ohmique de résistance R constitue un dipôle (R,C).

Nous allons soumettre différents circuits à un échelon de tension : on fait passer la tension aux bornes du circuit à étudier d'une valeur E_1 à une valeur E_2 en un temps très court considéré comme nul.

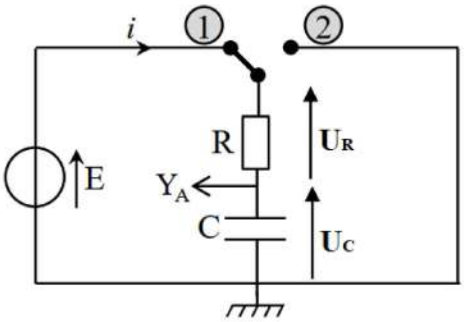
Pour cela, deux possibilités :

Echelon montant de tension	Echelon descendant de tension
	
à t < 0 : U=0 à t > 0 : U # 0 La valeur de U passe brutalement de E_1=0 à E_2 à un instant t = t_0.	à t < 0 : U # 0 à t > 0 : U = 0 La valeur de U passe brutalement de E_1 à E_2=0 à un instant t = t_0.

1- Réponse d'un dipôle RC à un échelon montant de tension

a- Charge d'un condensateur - l'équation différentielle

- Avant la fermeture de l'interrupteur K : Uc=0 (le condensateur est non chargé = déchargé)
- A un instant t=0 on ferme l'intercepteur K



D'après la loi d'additivité des tensions : $U_c(t) + U_R(t) = E$

Avec $U_R(t) = R.i(t)$ d'après la loi d'Ohm, et $i(t) = C.\frac{dU_C(t)}{dt}$

L'équation différentielle peut donc s'écrire :

$$R.C.\frac{dU_C(t)}{dt} + U_C = E$$

b- Expression de la tension Uc(t)

L'expression de la tension $U_c(t)$ est la solution de l'équation différentielle, elle s'écrit sous la forme:

$U_C(t) = A + B.e^{-\frac{t}{\tau}}$, avec A, B et τ des constantes.

c- Expression de A, B et τ

On dérive l'expression $U_C(t) = A + B.e^{-\frac{t}{\tau}}$ $\Rightarrow$ $\frac{dU_C(t)}{dt} = (A)' + (B.e^{-\frac{t}{\tau}})' = 0 + (-\frac{B}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}) = -\frac{B}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}$

On remplace $U_c(t)$ et $\frac{dU_C(t)}{dt}$ par leurs expressions dans l'équitation différentielle :

$$R.C.(-\frac{B}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}) + A + B.e^{-\frac{t}{\tau}} = E \quad \Rightarrow \quad -\frac{R.C.B}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} + A + B.e^{-\frac{t}{\tau}} = E$$

$$\Rightarrow \quad B.e^{-\frac{t}{\tau}}.(1 - \frac{R.C}{\tau}) + A = E$$

Cette équation est vérifiée quel que soit t (∀ t), si $\left(1 - \frac{R.C}{\tau}\right) = 0$ et **A = E** ; d'où **τ = R.C**

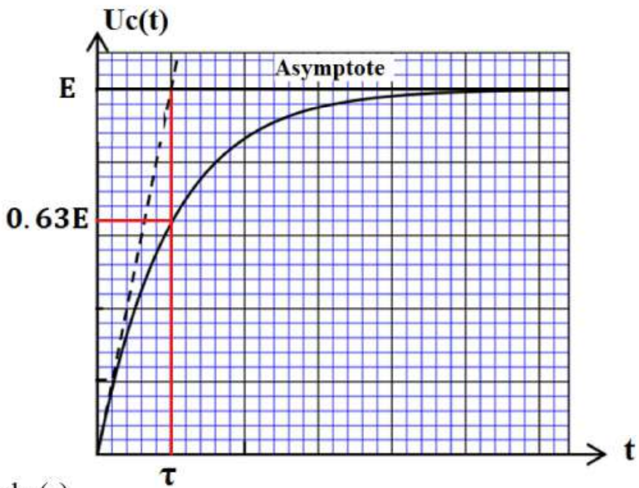
On sait qu'à l'instant t=0 le condensateur est déchargé (conditions initiales), $U_c(t=0) = 0$

D'où : $U_C(t = 0) = A + B.e^{-\frac{0}{\tau}} = 0$ $\Rightarrow$ A = - B = E $\Rightarrow$ **B = - E**

Donc l'expression de la tension $U_c(t)$ devient :

$$U_C(t) = E - E.e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad U_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad \text{avec : } \tau = R.C$$

d- Dimension de la constante τ



τ = R.C

D'après la loi d'Ohm : U = R.i $\Rightarrow$ $R = \frac{U}{i}$

La dimension de R s'écrit : $[R] = \frac{[U]}{[I]}$ (I)

A partir de la relation : $i = C.\frac{dU_C}{dt}$ $\Rightarrow$ $C = \frac{i.dt}{dU_C}$

La dimension de C s'écrit : $[C] = \frac{[I].[T]}{[U]}$ (II)

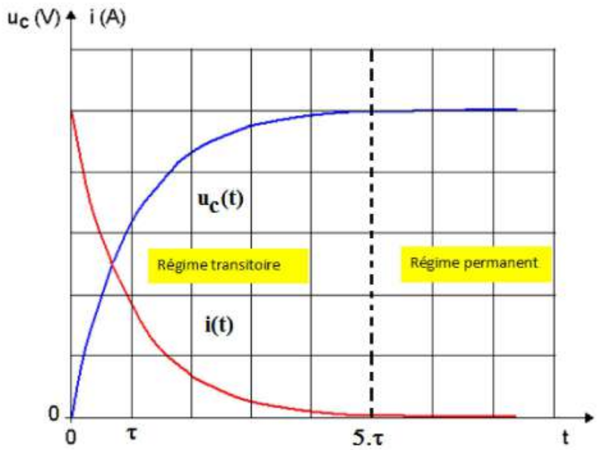
D'apès (I) et (II), la dimension de τ est :

$$[\tau] = [R].[C] = \frac{[U]}{[I]}.\frac{[I].[T]}{[U]} = [T]$$

Le produit R.C a la dimension d'un temps, son unité est la seconde (s)

La durée de la charge d'un condensateur de capacité C peut être caractérisée par la constante du temps τ=R.C du dipôle RC. Elle peut être déterminée à partir de la courbe représentant les variations de $U_C(t)$ en fonction du temps par deux méthodes :

- **Méthode 1** : τ est l'abscisse du point d'intersection entre la tangente à la courbe $U_C = f(t)$ à t=0 et l'asymptote horizontale $U_{C;max}$.
- **Méthode 2** : τ est aussi l'abscisse du point de la courbe $U_C = f(t)$ d'ordonnée 0,63 x $U_{C,max}$.



e- Expression de la charge q(t)

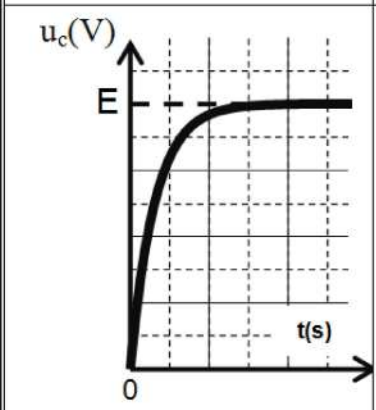
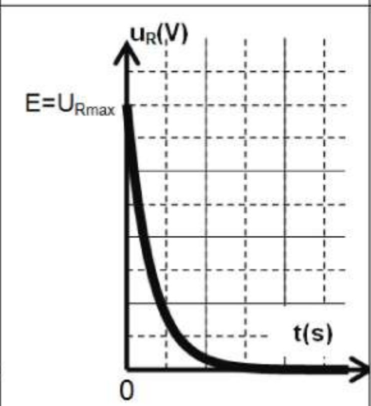
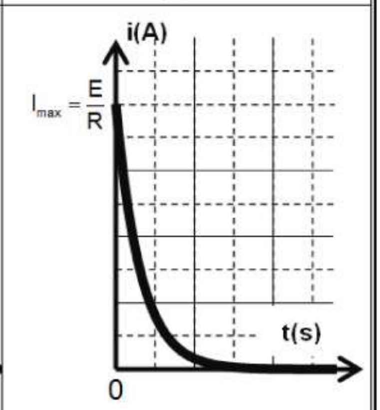
On sait que q(t) = C.U_c(t), donc : $q(t) = C.E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

f- Expression de l'intensité i(t).

On sait que $i(t) = C.\frac{dU_C(t)}{dt}$, avec : $\frac{dU_C(t)}{dt} = \frac{E}{R.C}.e^{-\frac{t}{\tau}}$

donc : $i(t) = C.\frac{E}{R.C}.e^{-\frac{t}{\tau}}$ $\Rightarrow$ $i(t) = \frac{E}{R}.e^{-\frac{t}{\tau}}$

g- Graphes de $U_C(t)$, $U_R(t)$ et de i(t)

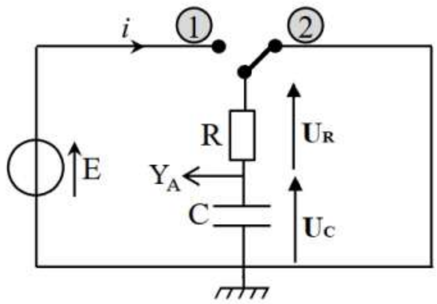
$u_c = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$	$u_R = E\,e^{-\frac{t}{\tau}}$	$i = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$
		

t(s)	0	+∞	t(s)	0	+∞	t(s)	0	+∞
u_c(V)	0	E	u_R(V)	E	0	i(A)	$\frac{E}{R}$	0

2- Réponse d'un dipôle RC à un échelon descendant de tension

a- Décharge d'un condensateur - l'équation différentielle

- Avant l'ouverture de l'interrupteur K : Uc = E (le condensateur est chargé)
- A un instant t=0 on bascule l'intercepteur K à la position 2.



D'après la loi d'additivité des tensions : $U_c(t) + U_R(t) = 0$

Avec $U_R(t)$ = R.i(t) d'après la loi d'Ohm, et i(t) =C.$\frac{dU_C(t)}{dt}$

L'équation différentielle peut donc s'écrire : $R.C.\frac{dU_C(t)}{dt} + U_C = 0$

b- Expression de la tension Uc(t)

L'expression de la tension $U_c(t)$ est la solution de l'équation différentielle, elle s'écrit sous la forme:

$$U_C(t) = A + B.e^{-\frac{t}{\tau}}$$, avec A, B et τ des constantes.

c- Expression de A, B et τ

On dérive l'expression $U_C(t) = A + B.e^{-\frac{t}{\tau}}$ $\Rightarrow$ $\frac{dU_C(t)}{dt} = (A)' + (B.e^{-\frac{t}{\tau}})' = 0 + (-\frac{B}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}) = -\frac{B}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}$

On remplace $U_c(t)$ et $\frac{dU_C(t)}{dt}$ par leurs expressions dans l'équitation différentielle :

$$R.C.(-\frac{B}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}) + A + B.e^{-\frac{t}{\tau}} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{R.C.B}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} + A + B.e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad B.e^{-\frac{t}{\tau}}.(1 - \frac{R.C}{\tau}) + A = 0$$

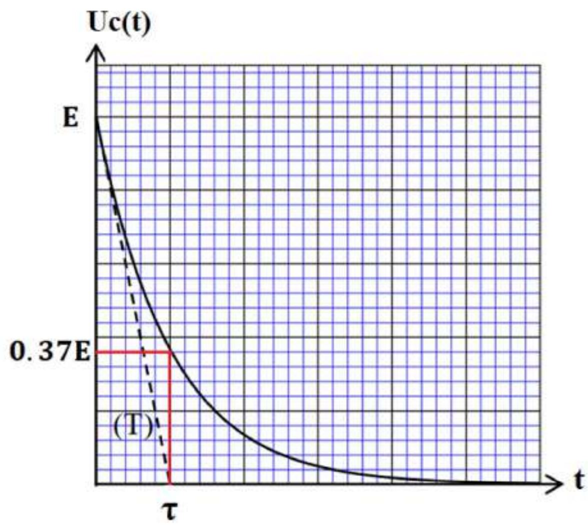
Cette équation est vérifiée quel que soit t (∀ t), si $\left(1 - \frac{R.C}{\tau}\right) = 0$ et **A = 0** ; d'où **τ = R.C**

On sait qu'à l'instant t=0 le condensateur est chargé (conditions initiales), $U_c(t{=}0) = E$

D'où : $U_C(t = 0) = B.e^{-\frac{0}{\tau}} = E$ $\Rightarrow$ **B = E**

Donc l'expression de la tension $U_c(t)$ devient :

$$U_C(t) = E.e^{-\frac{t}{\tau}}$$ avec : τ = R.C



d- Expression de la charge q(t)

On sait que $q(t) = C.U_c(t)$, donc : $q(t) = C.E.e^{-\frac{t}{\tau}}$

e- Expression de l'intensité i(t).

On sait que $i(t) = C.\frac{dU_C(t)}{dt}$, avec : $\frac{dU_C(t)}{dt} = -\frac{E}{R.C}.e^{-\frac{t}{\tau}}$

donc : $i(t) = -C.\frac{E}{R.C}.e^{-\frac{t}{\tau}}$ $\Rightarrow$ $i(t) = -\frac{E}{R}.e^{-\frac{t}{\tau}}$

f- Graphes de $U_C(t)$, $U_R(t)$ et de i(t)

$u_c = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$	$u_R = -Ee^{-\frac{t}{\tau}}$	$i = \frac{-E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$