CHAPITRE VIII

OSCILLATIONS LIBRES DANS UN CIRCUIT RLC SÉRIE

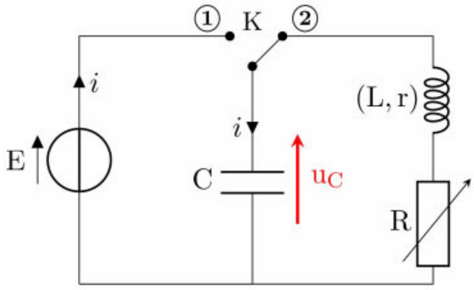
1 Décharge d'un condensateur dans une bobine.

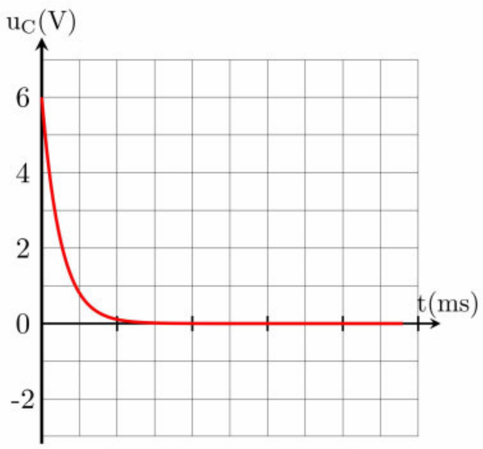
1.1 Systèmes d'oscillations libres du circuit RLC série.

Activité

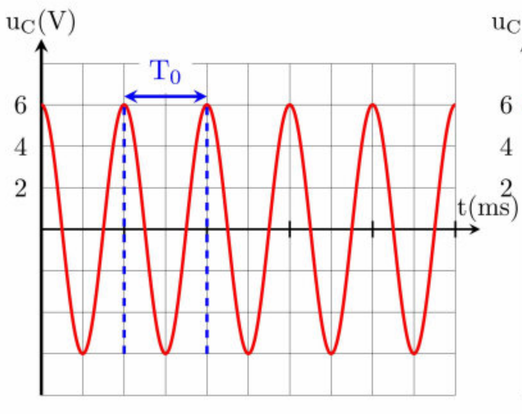
On réalise le circuit électrique ci-contre :

- Le condensateur est initialement déchargé. Pour le charger, on met l'interrupteur à la position ①.
- Lorsque le condensateur est entièrement chargé ($u_C = E = 6\,V$), on bascule l'interrupteur K vers la position ②, le condensateur se décharge à travers la bobine et la résistance R.
- Òn prend au début : $R_T = R + r = 10\,\Omega$, $L = 50\,mH$ et $C = 2\,\mu F$.
- On considère l'origine des dates, l'instant $t = 0$ où l'interrupteur est basculé vers la position ②, puis on visualise l'évolution de la tension u_C aux bornes du condensateur en fonction du temps.
- On obtient les courbes suivantes pour différentes valeurs de la résistance totale R_T.

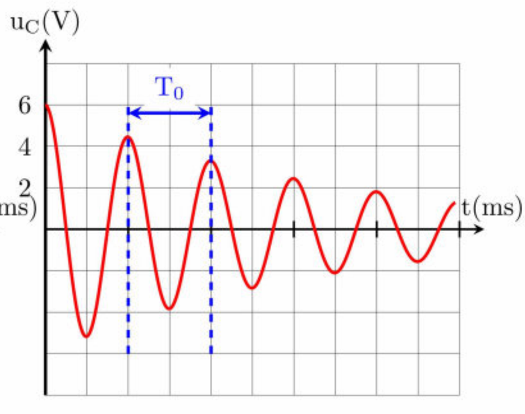




Régime apériodique



Régime périodique



Régime pseudo-périodique

Remarques :

- Lorsque l'interrupteur K est à la position ②, on obtient un **circuit RLC libre**.
- Lorsque la tension u_C aux bornes du condensateur **diminue**, on dit que les **oscillations** sont **amorties**.
- Les oscillations sont dites **libres** car le circuit RLC n'est pas alimenté par une énergie électrique.

Amortissement des oscillations :

⋆ Dans les régimes apériodique et pseudo-périodique, l'énergie totale $\mathscr{E}_T$ diminue à cause de l'existence de la résistance R_T dans laquelle l'énergie est dissipée par effet Joule.

- ⋆ Dans le régime périodique, l'énergie totale $\mathscr{E}_T$ reste constante car la résistance du circuit $R_T = 0$. pas de dissipation d'énergie.

1.2 Équation différentielle vérifiée par la tension u_C.

On considère le circuit RLC série représenté ci-contre.

⋆ La résistance totale du circuit est : $R_T = R + r$

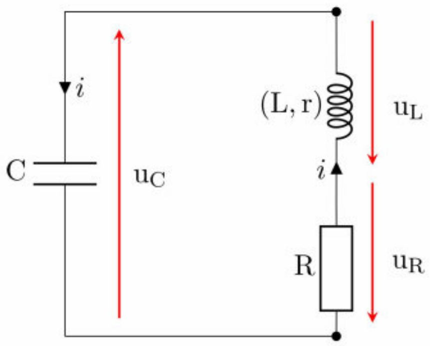
⋆ La loi d'additivité des tensions : $\boxed{u_R + u_L + u_C = 0}$

avec : $u_R = R.i$ et $i = \dfrac{dq}{dt} = C.\dfrac{du_C}{dt}$ et $u_L = L.\dfrac{di}{dt} + r.i$

Donc : $u_R = RC.\dfrac{du_C}{dt}$ et $u_L = rC.\dfrac{du_C}{dt} + LC.\dfrac{d^2u_C}{dt^2}$

Ainsi : $LC.\dfrac{d^2u_C}{dt^2} + (R+r)C.\dfrac{du_C}{dt} + u_C = 0.$

Finalement : $\boxed{\dfrac{d^2u_C}{dt^2} + \dfrac{R_T}{L}.\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{1}{LC}.u_C = 0}$

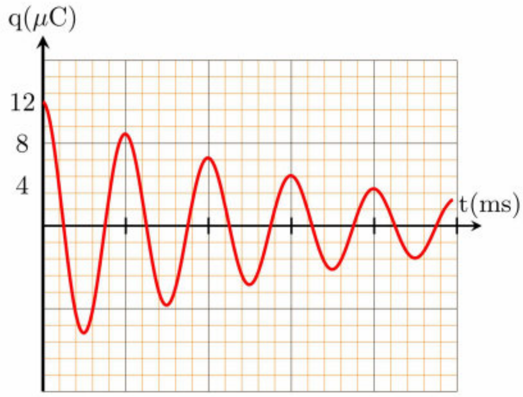


Remarque :

⋆ On a $q = C.u_C$ et $i = \dfrac{dq}{dt}$

$u_C = \dfrac{q}{C}$ et $u_R = R.\dfrac{dq}{dt}$ et $u_L = L.\dfrac{d^2q}{dt^2} + r.\dfrac{dq}{dt}$ donc : $L.\dfrac{d^2q}{dt^2} + (R+r).\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{C} = 0$

Ainsi, l'équation différentielle vérifiée par la **charge q** est : $\boxed{\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{R_T}{L}.\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{LC} = 0}$



⋆ Le terme $\dfrac{R_T}{L}.\dfrac{du_C}{dt}$ (ou $\dfrac{R_T}{L}.\dfrac{dq}{dt}$) est le responsable à l'amortissement des oscillations. En absence de ce terme, les oscillations deviennent périodique sinusoïdales.

2 Oscillations non amorties dans un circuit idéal LC.

Lorsque la résistance du circuit RLC est **négligeable** (R_T), le circuit est qualifié de **circuit idéal LC**.

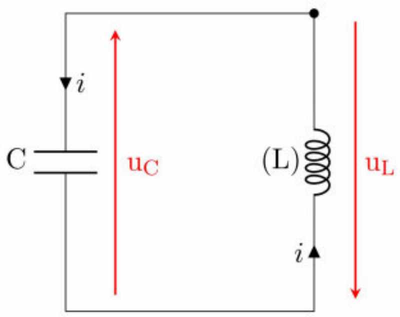
2.1 Équation différentielle vérifiée par la tension u_C.

On considère le circuit idéal LC représenté ci-contre.

⋆ La loi d'additivité des tensions : $\boxed{u_L + u_C = 0}$

⋆ Puisque $i = \dfrac{dq}{dt} = C.\dfrac{du_C}{dt}$ et $u_L = L.\dfrac{di}{dt}$ donc : $u_L = LC.\dfrac{d^2u_C}{dt^2}$

Ainsi : $LC.\dfrac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$ ou bien $\boxed{\dfrac{d^2u_C}{dt^2} + \dfrac{1}{LC}.u_C = 0}$



Remarque

On sait que : $q = C.u_C$ c'est à dire $u_C = \dfrac{q}{C}$

Ainsi, l'équation différentielle vérifiée par la **charge q** est : $\boxed{\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{q}{LC} = 0}$

⋆ Le terme responsable à l'amortissement des oscillations est **nul**, on obtient des oscillations sinusoïdales et un régime **périodique**.

2.2 Solution de l'équation différentielle.

La solution de l'équation différentielle $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}.u_C = 0$ s'écrit sous la forme : $\boxed{u_C(t) = U_m.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi)}$ telle que :

- U_m : amplitude maximale de la tension u_C, exprimée en (V).
- $(\frac{2.\pi}{T}.t + \varphi)$: phase de la tension u_C, exprimée en (rad).
- T_0 : période propre des oscillations, exprimée en (s).
- φ : phase à l'origine (t = 0), exprimée en (rad). On choisit : $-\pi \leq \varphi \leq \pi$

2.2.1 Expression de la période propre T_0.

On a : $u_C(t) = U_m.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi)$ donc : $\frac{u_C}{dt} = -U_m.\frac{2.\pi}{T_0}.\sin(\frac{2.\pi}{T}.t + \varphi)$

$\frac{d^2u_C}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{du_C}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(-U_m.\frac{2.\pi}{T_0}.\sin(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi)\right) = -U_m.\frac{4.\pi^2}{T_0^2}.\cos(\frac{2.\pi}{T}.t + \varphi) = -\left(\frac{2.\pi}{T_0}\right)^2.u_C$

On remplace dans l'équation différentielle : $\left(-\frac{2.\pi}{T_0}\right)^2.u_C + \frac{1}{LC}.u_C = 0$ c'est à dire : $\left(\frac{2.\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{1}{LC}$ Donc :

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{LC}}$$

⋆ La fréquence propre des oscillations est : $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

Remarques :

⋆ Équation des dimensions de la période propre T_0 :

• On a : $u_L = L.\frac{di}{dt}$ donc : $[L] = \frac{[u].[t]}{[i]}$

• On a : $i = C.\frac{du_C}{dt}$ donc : $[C] = \frac{[i].[t]}{[u]}$

$\Rightarrow [T_0] = [2\pi\sqrt{LC}] = \sqrt{[L].[C]} = \sqrt{\frac{[u].[t]}{[i]}.\frac{[i].[t]}{[u]}} = \sqrt{[t]^2}$ donc : $\boxed{[T_0] = [t]}$

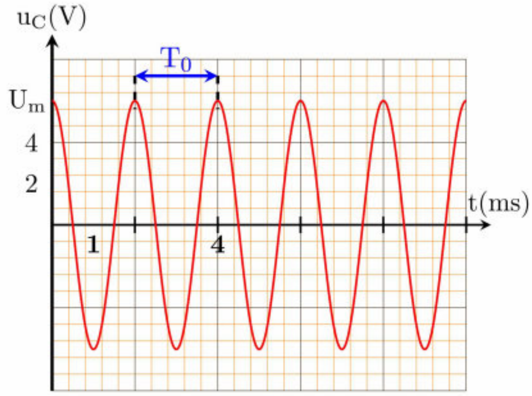
♠ La période propre T_0 est un temps qui est exprimée en (s).

⋆ Pour le régime pseudo-périodique, la valeur de la pseudo-période T est **voisine** de celle de T_0 : $T = T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

2.2.2 Détermination de U_m et φ.

On a : $u_C(t) = U_m.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi)$, pour t = 0, on écrit : $u_C(0) = U_m.\cos(\varphi)$
D'après les conditions initiales (t = 0), on a : $u_C(0) = E$.
Puisque U_m représente la valeur maximale de u_C (amplitude de u_C), donc : $\boxed{U_m = E}$ et $\cos(\varphi) = 1$ c'est à dire : $\boxed{\varphi = 0}$

Finalement : L'expression de u_C est : $\boxed{u_C(t) = E.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t)}$ ou bien $\boxed{u_C(t) = E.\cos(2.\pi.f_0.t)}$



2.2.3 Expression de la charge du condensateur q(t).

On a : $q = C.u_C$ et $u_C(t) = E.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t)$

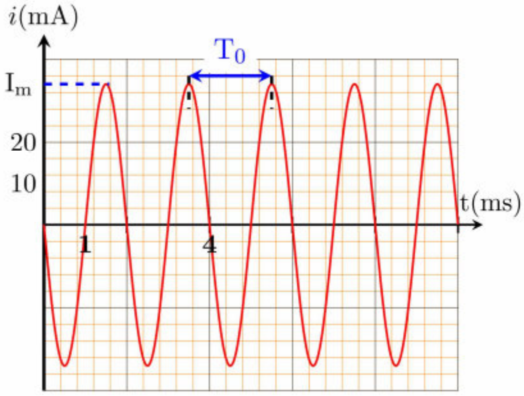
Donc : $q(t) = C.E.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t)$ ou bien $\boxed{q(t) = Q_m.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t)}$

avec $Q_m = C.E$: valeur maximale de la charge du condensateur (amplitude de q(t)).

2.2.4 Expression de l'intensité de courant $i(t)$.

On a : $i = \dfrac{\mathrm{dq}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{C}.\dfrac{\mathrm{du_C}}{\mathrm{dt}}$, donc : $i(t) = -\mathrm{C.E.}\dfrac{2\pi}{\mathrm{T_0}}.\sin\left(\dfrac{2\pi}{\mathrm{T_0}}.\mathrm{t}\right)$ ou bien $\boxed{i(t) = \mathrm{I_m}.\cos\left(\dfrac{2\pi}{\mathrm{T_0}}.\mathrm{t} + \dfrac{\pi}{2}\right)}$ Rappel : $\boxed{\cos(\alpha + \dfrac{\pi}{2}) = -\sin\alpha}$

avec : $\mathrm{I_m} = \mathrm{C.E.}\dfrac{2\pi}{\mathrm{T_0}} = \dfrac{2\pi.\mathrm{C.E}}{2\pi\sqrt{\mathrm{LC}}} = \mathrm{E}.\sqrt{\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{L}}}$ est l'intensité maximale (A).



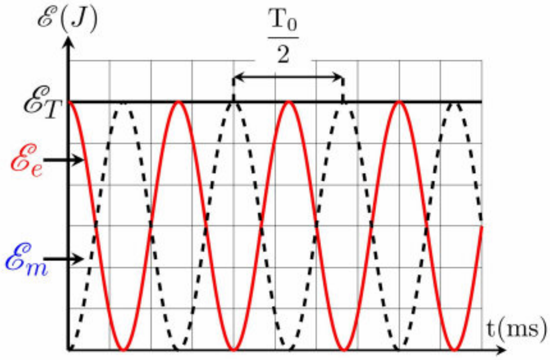
3 Transfert d'énergie entre le condensateur et la bobine.

3.1 Énergie du circuit idéal LC.

- L'énergie $\mathscr{E}_T$ du circuit idéal LC, reste **constante** au cours du temps et égale à l'énergie initialement emmagasinée dans le condensateur. On dit que l'énergie totale **se conserve**, c'est à dire $\mathscr{E}_T = cte$ et $\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_\mathrm{T}}{\mathrm{dt}} = 0$.
- Au cours des oscillations non amorties, l'énergie électrique $\mathscr{E}_e$ emmagasinée dans le condensateur se transforme en énergie magnétique $\mathscr{E}_m$ dans la bobine et inversement.

  On a : $\boxed{\mathscr{E}_e = \dfrac{1}{2}.\mathrm{C.u_C^2}}$ et $\boxed{\mathscr{E}_m = \dfrac{1}{2}.\mathrm{L}.i^2}$

  Rappel : $\boxed{\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}}$ $\boxed{\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}$



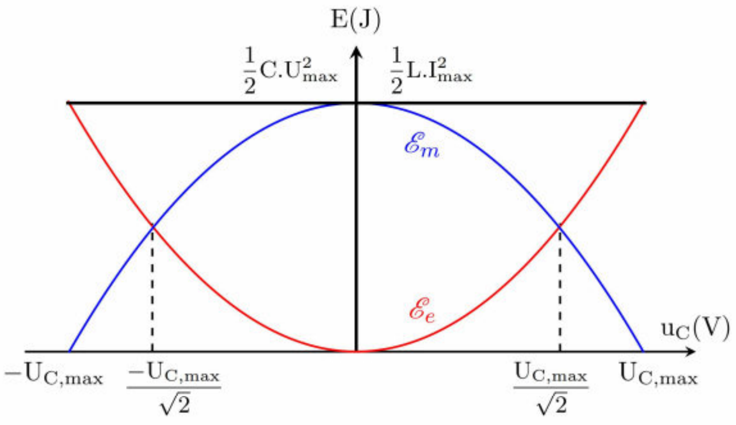
Énergie du cicrcuit idéal LC

L'expression de l'énergie totale : $\boxed{\mathscr{E}_T = \mathscr{E}_e + \mathscr{E}_m = \dfrac{1}{2}.\mathrm{C.u_C^2} + \dfrac{1}{2}.\mathrm{L}.i^2}$

Remarque :

⋆ Lorsque $\mathrm{u_C} = \mathrm{U_m}$, on a : $i = 0$, donc : $\boxed{\mathscr{E}_T = \mathscr{E}_{e,max} = \dfrac{1}{2}.\mathrm{C.U_m^2}}$

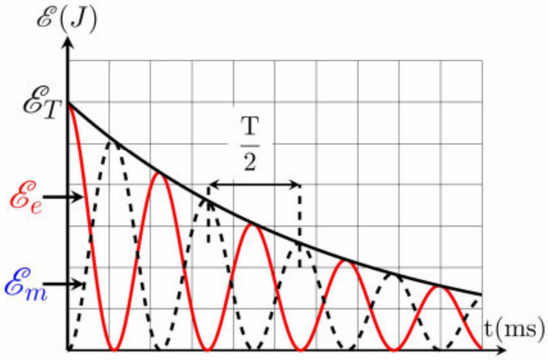
⋆ Lorsque $\mathrm{u_C} = 0$, on a : $i = \mathrm{I_m}$, donc : $\boxed{\mathscr{E}_T = \mathscr{E}_{m,max} = \dfrac{1}{2}.\mathrm{L.I_m^2}}$



Énergies en fonction de $\mathrm{u_C}$

3.2 Énergie du circuit RLC série.

- L'énergie totale du circuit RLC diminue du fait de l'existence de la résistance R qui transforme une partie d'énergie en énergie thermique dissipée par effet Joule.
- Lorsque l'énergie électrique $\mathscr{E}_e$ diminue, l'énergie magnétique $\mathscr{E}_m$ augmente et inversement.
- Les variations de $\mathscr{E}_e$ et de $\mathscr{E}_m$ est pseudo-périodiques, de période qui vaut la demi-période de la tension u_C.



Énergie du cicrcuit RLC série

L'expression de l'énergie totale du circuit RLC série, à l'instant t :

$$\boxed{\mathscr{E}_T = \frac{1}{2}.C.u_C^2 + \frac{1}{2}.L.i^2 = \frac{1}{2}.\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}.L.i^2}$$

On a : $i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{du_C}{dt}$

$\frac{d\mathscr{E}_T}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}.L.i^2) + \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}.C.u_C^2) = L.i.\frac{di}{dt} + C.u_C.\frac{du_C}{dt} = i.\left(L.\frac{di}{dt} + u_C\right) = i.\left(LC.\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C\right)$ L'équation différentielle vérifiée par la tension u_C : $\boxed{LC.\frac{d^2u_C}{dt^2} + R_TC.\frac{u_C}{dt} + u_C = 0}$

c'est à dire : $LC.\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = -R_T.\frac{u_C}{dt} = -R_T.i$ donc : $\frac{\mathscr{E}_T}{dt} = i.(-R_T.i) \Rightarrow \boxed{\frac{\mathscr{E}_T}{dt} = -R_T.i^2}$

♠ L'énergie totale du circuit RLC est **décroissante** (car $\frac{\mathscr{E}_T}{dt} < 0$), une partie d'énergie est dissipée par effet Joule à cause la résistance R_T.

4 Entretien des oscillations.

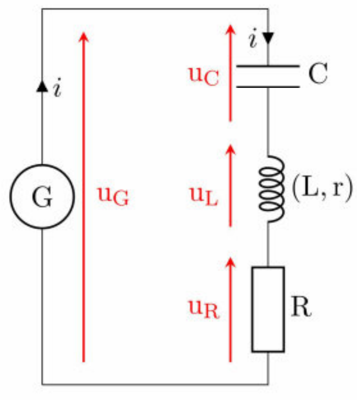
- L'amplitude des oscillations du circuit RLC série diminue progressivement au cours de temps à cause de la dissipation de l'énergie par effet Joule dans la résistance R_T du circuit. Pour les entretenir (obtenir des oscillations d'amplitude constante), On ajoute au circuit un appareil qui compense, à chaque instant, l'énergie dissipée par effet Joule.
- L'appareil d'entretien est un **générateur** qui alimente le circuit par une tension proportionnelle à l'intensité de courant i qui parcourt le circuit : $\boxed{u_G = R_0.i}$
- L'appareil d'entretien se comporte comme une **résistance négative** de valeur $-R_0$.

Étude théorique.

On considère suivant contenant l'appareil d'entretien G.

⋆ La loi d'additivité des tensions : $\boxed{u_R + u_L + u_C = u_G}$

Avec : $u_G = R_0.i$ et $i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{du_C}{dt}$ et $R_T = R + r$, Donc :



$$R.i + r.i + L.\frac{di}{dt} + u_C = R_0.i$$
$$LC.\frac{d^2u_C}{dt^2} + (R + r).i - R_0.i + u_C = 0$$
$$LC.\frac{d^2u_C}{dt^2} + (R_T - R_0).i + u_C = 0$$
$$LC.\frac{d^2u_C}{dt^2} + (R_T - R_0).\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$
$$\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{(R_T - R_0)}{L}.\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}.u_C = 0}$$

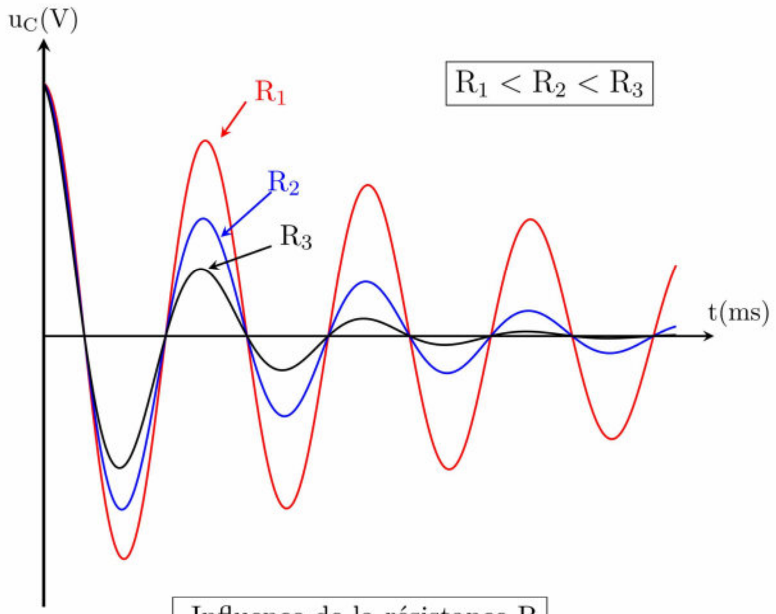
♠ En réglant R_0 à une valeur égale à R_T ($R_0 = R_T$), le terme responsable à l'amortissement s'annule : $\frac{(R_T - R_0)}{L}.\frac{du_C}{dt} = 0$

On obtient l'équation différentielle du circuit idéal LC : $\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}.u_C = 0}$

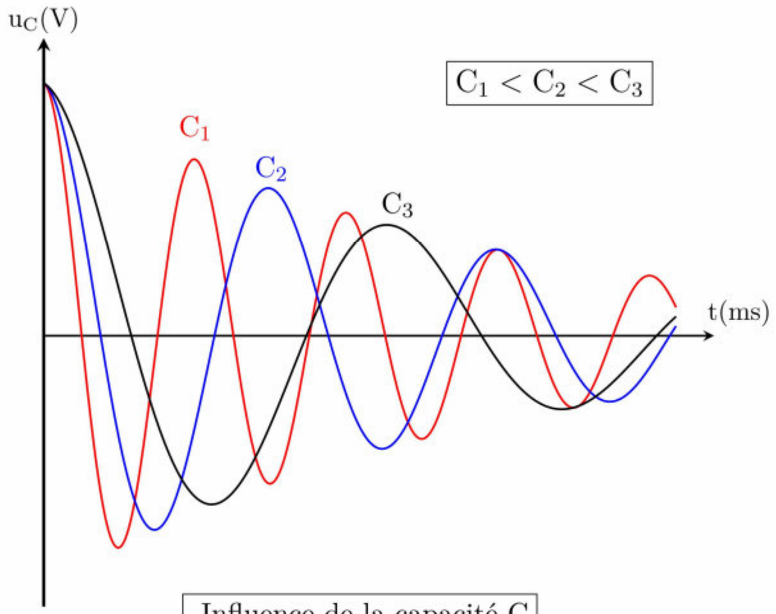
⋆ La période des oscillations est donc : $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{LC}}$

Remarque

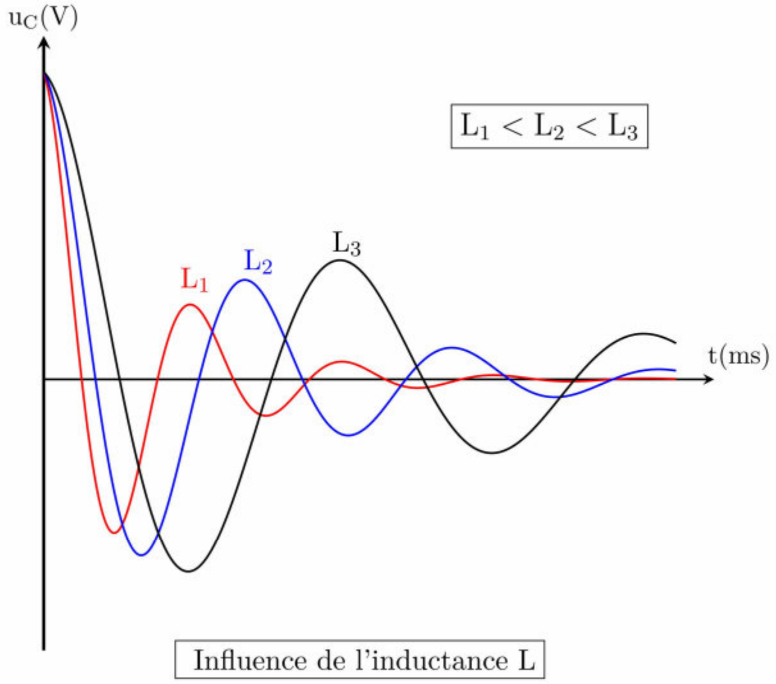
En ajoutant l'appareil d'entretien, on peut générer une tension sinusoïdale de fréquence contrôlée par les valeurs de L et C.



Influence de la résistance R



Influence de la capacité C



$u_C(V)$
$L_1 < L_2 < L_3$
L_1
L_2
L_3
t(ms)
Influence de l'inductance L