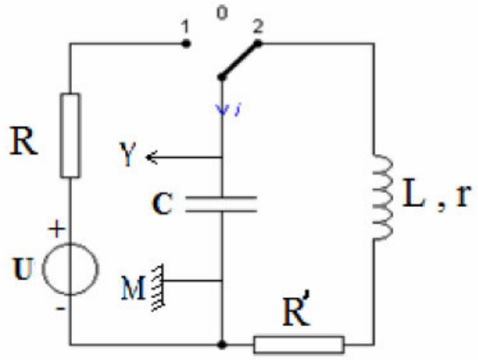
# Chapitre 8

# Les oscillations libres dans un circuit RLC série

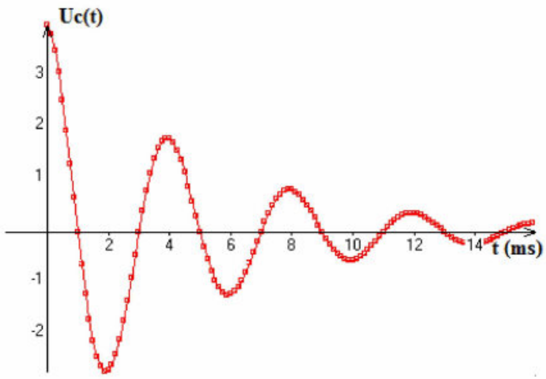
## I- Décharge d'un condensateur dans un dipôle RL

### 1- Les oscillations libres du circuit RLC série




On réalise le montage ci-contre :
On visualise la tension $U_C$ à l'aide d'un oscilloscope à mémoire.
On place l'interrupteur sur la position 1, le condensateur se charge, puis on bascule l'interrupteur en position 2. on obtient alors un circuit RLC série.
Le condensateur se décharge dans un dipôle RL où R = R' + r.

**Observations :**




- La tension $U_C$ prend alternativement des valeurs positives et des valeurs négatives. Elle oscille autour de Uc = 0.
- La tension $U_C$ subit des oscillations :
  - Libres (car elles spontanées, aucun apport d'énergie)
  - Amorties (car leur valeur maximale diminue au cours du temps).
- D'autre part, $U_C$ repasse par une valeur nulle à intervalles de temps égaux, et en variant dans le même sens.

La décharge d'un condensateur, initialement chargé, dans la bobine d'un circuit RLC série provoque l'apparition des oscillations amorties dites libres.

### 2- Equation différentielle du circuit RLC série en régime libre

On applique la loi d'additivité des tensions dans la branche du circuit comportant les composantes R', L, C :

On a : $U_c(t) + U_L(t) + U_R(t) = 0$

Avec : $U_L(t) = L.\frac{di(t)}{dt} + r.i(t)$ ; $U_R(t) = R.i(t)$ et $i(t) = C.\frac{dU_C}{dt}$

Donc : $U_c(t) + L.\frac{di(t)}{dt} + r.i(t) + R.i(t) = 0$

D'où : $U_c(t) + LC.\frac{d^2U_C}{dt^2} + R_T.C.\frac{dU_C}{dt} = 0$ ; avec : $R_T = R + r$

L'équation différentielle d'un circuit RLC série en régime libre s'écrit alors :

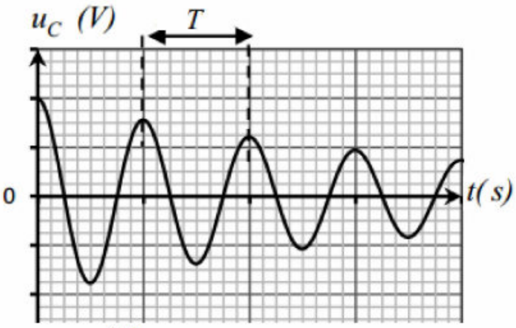
$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{R_T}{L}.\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{LC}.U_c(t) = 0$$

Le terme : $\frac{R_T}{L}.\frac{dU_C}{dt}$ traduit **l'amortissement** des oscillations électriques, et sa valeur permet de définir les régimes du circuit RLC.

Pour une inductance L et une capacité C fixées, on observe trois régimes différents de l'évolution de $U_C(t)$ suivant la valeur de la résistance $R_T = R + r$.

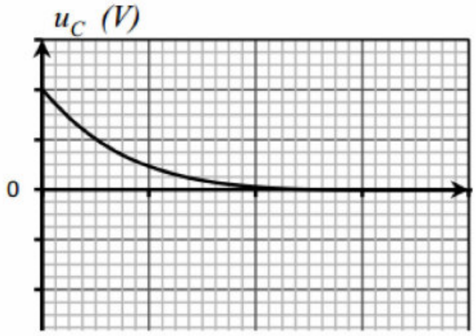
### 3- Les trois régimes libres du circuit RLC série

#### a- Le régime pseudo-périodique



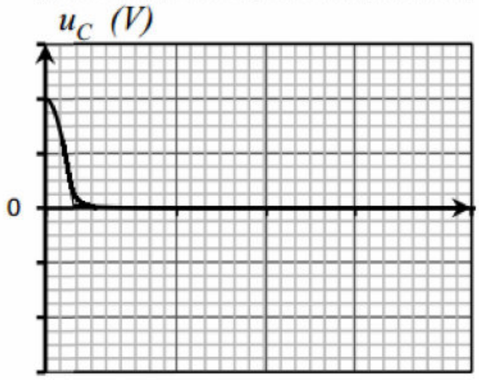

- Pour de faibles valeurs de $R_T$ , la tension $U_C(t)$ présente des oscillations amorties
- La durée entre deux maxima (ou deux minima) successifs définit la pseudo-période T des oscillations amorties

#### b- Le régime apériodique




- Pour d'importantes valeurs de $R_T$, la tension UC(t) s'amortit très vite, c'est le régime apériodique
- On observe la décharge sans que $U_C(t)$ oscille.

#### c- Le régime apériodique critique

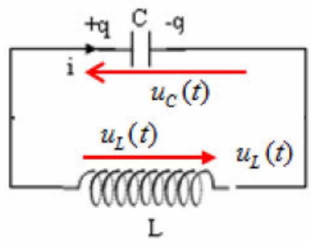



- Pour une valeur particulière de la résistance $R_T = 2.\sqrt{\frac{L}{C}}$, le régime est qualifié de régime apériodique critique
- Lors de ce régime $U_C(t)$ tend plus rapidement vers une valeur nulle.

**Remarque** : Le régime apériodique critique est difficile à déterminer expérimentalement.

## II- Circuit LC idéal : régime périodique

### 1- Etablissement de l'équation différentielle.




Après avoir chargé le condensateur, on le place dans un circuit comportant une bobine de résistance interne négligeable (r = 0).
D'après la loi d'additivité des tensions :

On a : $U_c(t) + U_L(t) = 0$

Donc : $U_c(t) + L.\frac{di(t)}{dt} = 0$

D'où : $U_c(t) + LC.\frac{d^2U_C}{dt^2} = 0$

L'équation différentielle vérifiée par la tension $U_C(t)$ dans un circuit LC idéal en régime libre s'écrit alors :

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}.U_c(t) = 0$$

### 2- Solution de l'équation différentielle vérifiée par la tension $U_C(t)$.

La solution de l'équation différentielle $\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}.U_c(t) = 0$ s'écrit sous la forme : $\mathbf{U_C(t) = U_m.\cos(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi_0)}$
avec : $U_m$, $T_0$ et $\varphi_0$ étant des grandeurs à déterminer.

- $T_0$ est la période propre du circuit LC, elle s'exprime en seconde (s)
- $\varphi_0$ est la phase à l'origine, elle s'exprime en radian (rad)

#### a- Expression de $T_0$

❖ <u>Dans un premier temps</u>, on dérive deux fois l'expression : $U_C(t) = U_m.\cos(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi_0)$

**Rappel mathématique :**

[ cos(a.t) ]' = - sin(a.t) × a et [ sin(a.t) ]' = cos(a.t) × a

On a donc :

$$\frac{dU_C}{dt} = -U_m \sin(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2U_C}{dt^2} = -U_m.\left(\frac{2.\pi}{T_0}\right)^2.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi_0)$$

- Dans un deuxième temps, on remplace $U_C(t)$ et $\frac{d^2U_C}{dt^2}$ par leurs expressions dans l'équation différentielle, et on obtient :

$$-U_m.\left(\frac{2.\pi}{T_0}\right)^2.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi_0) + \frac{1}{LC}.U_m.\cos(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi_0) = 0$$

D'où :

$$U_m.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi_0)\left[-\left(\frac{2.\pi}{T_0}\right)^2 + \frac{1}{LC}.\right] = 0$$

- Dans un troisième temps, on identifie $T_0$ :

Pour ce faire, il faut s'affranchir du temps, c'est à dire éliminer la partie de l'expression qui dépend du temps. Il suffit que :

$\left[-\left(\frac{2.\pi}{T_0}\right)^2 + \frac{1}{LC}.\right] = 0$ , c'est à dire que : $\boldsymbol{T_0 = 2\pi.\sqrt{LC}}$, avec L: inductance en (H) et C: capacité en (F).

### b- Expression de $U_m$ et $\varphi_0$.

On prend en compte les conditions initiales à t = 0 : à t = 0 ⇒ $U_C(0) = E$ et $i(0) = 0$
On sait que :

$$U_C(t) = U_m.\cos(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi_0) \quad \text{d'où :} \quad U_C(t=0) = U_m.\cos(\frac{2\pi}{T_0} \times 0 + \varphi_0) = E$$

$$\Rightarrow \quad U_C(t=0) = U_m.\cos(\varphi_0) = E \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U_m = E} \text{ et } \cos(\varphi_0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varphi_0 = 0}$$

D'où l'expression de la tension $U_C(t)$ aux bornes du condensateur s'écrit :

$$\mathbf{U_C(t) = E.\cos(\frac{2\pi}{T_0}.t)} \quad ; \quad \text{avec} \quad : \quad T_0 = 2\pi.\sqrt{LC}$$

### 3- Expression de la charge q(t) et de l'intensité de courant i(t)

**Exercices d'application :**

1- A partir de l'expression de $U_C(t)$, déterminer les expressions de q(t) et de i(t)
2- Par analyse dimensionnelle, montrer que la période propre des oscillations $T_0$ est homogène au temps sachant que le terme 2π n'a pas de dimension.

## III-Etude énergétique.

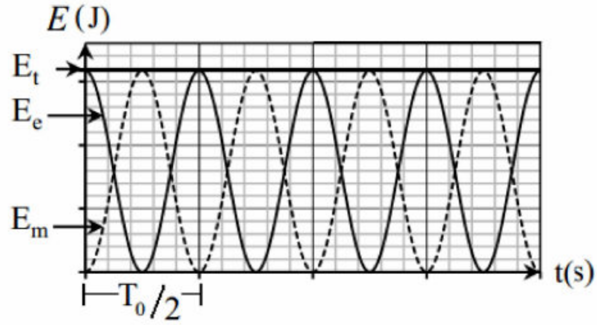
Dans un circuit RLC ou LC, l'énergie totale du circuit est : $E_{Totale} = E_e + E_m$ ; $E_{Totale} = \frac{1}{2}.C.U_C{}^2 + \frac{1}{2}.L.i^2$

| Dans un circuit RLC | Dans un circuit LC |
|---|---|
| $E_T = E_e + E_m$ ; $E_T = \frac{1}{2}.C.U_C{}^2 + \frac{1}{2}.L.i^2$<br>$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}.C.2.U_C(t).\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{2}.L.2.i(t).\frac{di(t)}{dt}$<br>Donc : $\frac{dE}{dt} = C.U_C(t).\frac{dU_C}{dt} + L.i(t).\frac{di(t)}{dt}$<br>Avec : $i(t) = C.\frac{dU_C}{dt}$ | $E_T = E_e + E_m$ ; $E_T = \frac{1}{2}.C.U_C{}^2 + \frac{1}{2}.L.i^2$<br>$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}.C.2.U_C(t).\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{2}.L.2.i(t).\frac{di(t)}{dt}$<br>Donc : $\frac{dE}{dt} = C.U_C(t).\frac{dU_C}{dt} + L.i(t).\frac{di(t)}{dt}$<br>Avec : $i(t) = C.\frac{dU_C}{dt}$ |

| | |
|---|---|
| $\frac{dE}{dt} = U_C(t).C.\frac{dU_C}{dt} + L.C.\frac{dU_C}{dt}.\frac{di(t)}{dt}$<br>$\frac{dE}{dt} = (U_C(t) + L.\frac{di(t)}{dt}).C.\frac{dU_C}{dt}$<br>$\frac{dE}{dt} = (U_C(t) + L.C\frac{d^2U_C}{dt^2}).C.\frac{dU_C}{dt}$<br>Puisque : $\mathbf{U_c(t) + LC.\frac{d^2U_C}{dt^2} + R_T.C.\frac{dU_C}{dt} = 0}$<br>Donc : $U_c(t) + LC.\frac{d^2U_C}{dt^2} = -R_T.C.\frac{dU_C}{dt} = -R_T.i(t)$<br>$\frac{dE}{dt} = (-R_T.i(t)).C.\frac{dU_C}{dt} = -R_T.i^2(t)$<br>$\mathbf{\frac{dE}{dt} \neq 0}$ **: d'où l'énergie totale n'est pas constante** | $\frac{dE}{dt} = U_C(t).C.\frac{dU_C}{dt} + L.C.\frac{dU_C}{dt}.\frac{di(t)}{dt}$<br>$\frac{dE}{dt} = (U_C(t) + L.\frac{di(t)}{dt}).C.\frac{dU_C}{dt}$<br>$\frac{dE}{dt} = (U_C(t) + L.C\frac{d^2U_C}{dt^2}).C.\frac{dU_C}{dt}$<br>Puisque : $\mathbf{U_c(t) + LC.\frac{d^2U_C}{dt^2} = 0}$<br>Donc : $\frac{dE}{dt} = (U_C(t) + L.C\frac{d^2U_C}{dt^2}).C.\frac{dU_C}{dt} = 0$<br>$\mathbf{\frac{dE}{dt} = 0}$ **: d'où l'énergie totale est constante** |

### 1- Dans un circuit LC

l'énergie totale du circuit est constante au cours du temps : $E_{Totale} = E_e + E_m$ = constante
Il y a un échange énergétique entre le condensateur et la bobine.



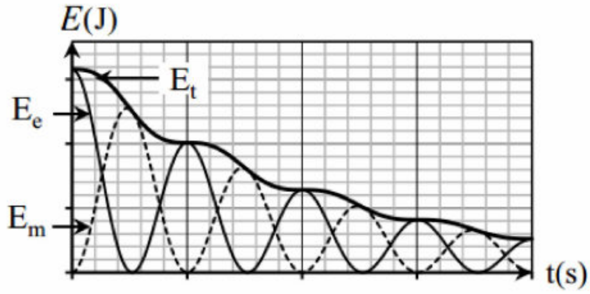

**Expression de l'énergie totale** :

- en fonction de la tension maximale aux bornes du condensateur :
  $U_C = E$, on a : $E_{Totale} = \frac{1}{2}.C.E^2$
- en fonction de l'intensité maximale parcourant le circuit :
  $i = I_{max}$, on a : $E_{Totale} = \frac{1}{2}.L.I_{max}^2$

Lorsque l'énergie emmagasinée dans le condensateur diminue,
l'énergie de la bobine augment et inversement, donc il y a un échange d'énergie entre le condensateur et la bobine au cours d'une période : $T=T_0/2$ ; avec $T_0$ la période propre des oscillations

### 2- Dans un circuit RLC

Il y a toujours un échange énergétique entre le condensateur et la bobine mais cette fois-ci, il y a dissipation de l'énergie par effet Joule (transfert thermique) dans les résistances du circuit. Il y a donc amortissements des oscillations.

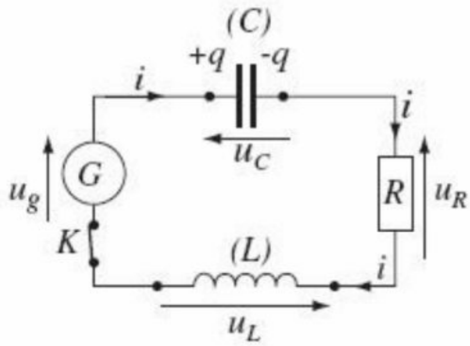



## IV-Entretien des oscillations.

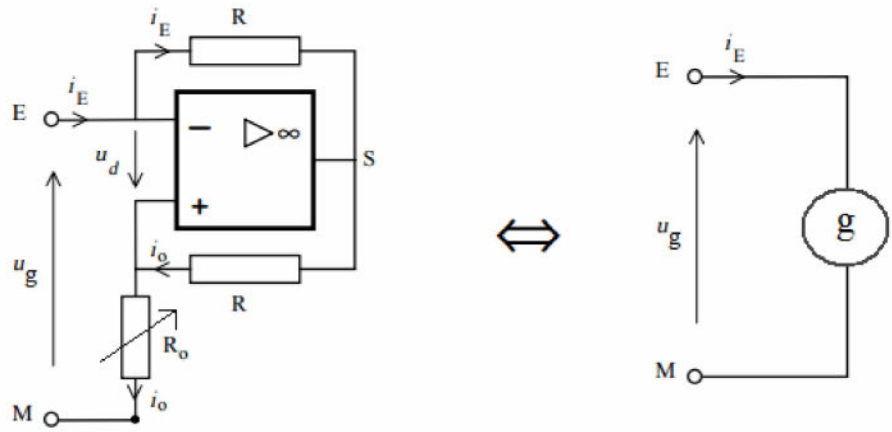
### 1- Nécessité d'une source d'énergie

Un oscillateur électrique tel que nous l'avons vu est amorti par dissipation de l'énergie par effet Joule dans les conducteurs ohmiques.
Pour entretenir les oscillations d'un circuit RLC libre, il faut apporter au circuit par l'intermédiaire d'un dispositif, la même quantité d'énergie qui a été perdue. C'est le rôle du dispositif d'entretien.

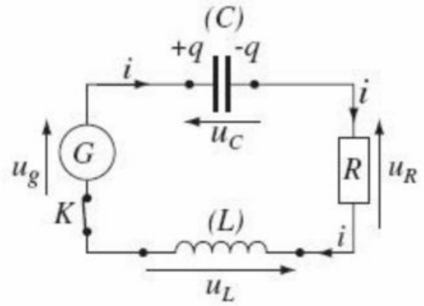
### 2- Dispositif d'entretien des oscillations: montage à résistance négative




En convention récepteur, la tension aux bornes de dispositif d'entretien a pour expression : $Ug = - R_0.i(t)$.




### 3- Condition d'entretien des oscillations




On applique la loi d'additivité des tensions dans ce circuit :

On a : $U_c(t) + U_L(t) + U_R(t) = R_0.i$

Avec : $U_L(t) = L.\frac{di(t)}{dt} + r.i(t)$ ; $U_R(t) = R.i(t)$ et $i(t) = C.\frac{dU_C}{dt}$

Donc : $U_c(t) + L.\frac{di(t)}{dt} + r.i(t) + R.i(t) = R_0.i$

D'où, l'équation différentielle vérifiée par la tension $U_C(t)$ dans le circuit s'écrit :

$$U_c(t) + LC.\frac{d^2U_C}{dt^2} + (R_T - R_0).C.\frac{dU_C}{dt} = 0 \quad ; \text{ avec : } R_T = R + r$$

Si $R_T = R_0$, l'équation devient :

$$U_c(t) + LC.\frac{d^2U_C}{dt^2} = 0$$

Cette dernière équation représente l'équation différentielle vérifiée par la tension $U_C(t)$ dans un circuit LC idéal où l'énergie totale du circuit et l'amplitude des oscillations sont constantes au cours du temps.

Avec le dispositif d'entretien, le circuit $R_TLC$ devient équivalent à un circuit LC et oscille avec une période propre $T_0$ qui dépend uniquement de la valeur de L et de la valeur de C :

$$T_0 = 2\pi.\sqrt{LC}$$